Paulo Bucchi

Curso Prático de Matemática – volume 1

Introdução

Este livro é o primeiro de uma coleção de três volumes destinados às três séries do Ensino Médio. Ele é acompanhado por um "Livro do Professor" que contém as soluções de alguns dos numerosos exercícios do livro do aluno, mas não apresenta quaisquer recomendações ou orientações ao docente que optar por adotá-lo.

O primeiro volume tem 560 páginas distribuídas em 23 capítulos da seguinte maneira:

1. Conjuntos
2. Conjuntos Numéricos
3. Relações
4. Estudo das Funções
5. Função do 1º grau ou Função Afim
6. Função do 2º grau ou Função Quadrática
7. Função Modular
8. Composição de Funções e Função Inversa
9. Função Exponencial
10. Estudo dos Logaritmos
11. Função Logarítmica
12. Sistemas de Logaritmos
13. Introdução à Trigonometria
14. Trigonometria na Circunferência. Arcos e Ângulos
15. Funções Trigonométricas
16. Relações entre as Funções Trigonométricas
17. Redução ao primeiro quadrante

18. Transformações Trigonométricas
19. Equações Trigonométricas
20. Inequações Trigonométricas
21. Funções Trigonométricas Inversas
22. Resolução de triângulos quaisquer
23. Questões complementares

O volume contém ainda meia página dirigida ao estudante; um sumário no qual são detalhadas as seções em que se dividem todos os capítulos; as respostas de todos os exercícios; a bibliografia citada pelo autor.

Diversos capítulos apresentam pequenos textos referentes à História da Matemática, acompanhados de ilustrações. Além dessas ilustrações, todo o volume mostra muitos desenhos ou fotografias a cores, com atraente aspecto gráfico.

A seguir vamos analisar e comentar os capítulos do livro, optando, algumas vezes, por agrupá-los quando relativos ao mesmo tema ou a temas intimamente relacionados.

Capítulo 1. Conjuntos

Este primeiro capítulo contém 30 páginas sobre conjuntos, distribuídas em 15 seções. A linguagem dos conjuntos é, como sabemos, fundamental para a expressão dos conceitos matemáticos, já que lhes confere a generalidade e a precisão características da Matemática. É por sua eficiência em expressar noções lógicas que se pode justificar o seu estudo na escola básica, particularmente no ensino médio, quando os estudantes já possuem maturidade para compreender tais noções; aí está, portanto, o sentido de serem trabalhados os elementos de tal linguagem. Por exemplo, a inclusão de conjuntos traduz uma implicação lógica; o complementar de um conjunto a negação; a interseção e a reunião de conjuntos os conectivos "e" e "ou".

Infelizmente, nada sobre isso é dito neste capítulo, o que não esclarece as razões da apresentação de tantos aspectos da linguagem dos conjuntos.

Muitos dos exemplos de conjuntos apresentados envolvem objetos que não são da Matemática, refletindo essa total desconexão entre a linguagem e as noções lógicas. Aparecem, então, conjuntos do tipo $\{x \mid x \text{ é satélite natural da Terra}\}$ e $\{x \mid x \text{ é o mês do ano que começa pela letra } P\}$, e pouquíssimas referências a conjuntos do contexto da Geometria. A seguir vamos comentar alguns aspectos pontuais do capítulo.

Na página 3, aparece a frase "C é o conjunto dos elementos x tal que x obedece à propriedade P", que contém um erro de concordância (deveria ser "tais que") e uma impropriedade de uso do verbo obedecer (é mais adequado dizer que um objeto *goza* de uma propriedade, *tem* uma propriedade ou *possui* uma propriedade).

Na mesma página, está a frase "Um conjunto pode ser representado por um *diagrama* que facilita a visualização de suas propriedades", que dá a impressão de que qualquer conjunto pode ser representado eficientemente pelos chamados *diagramas de Venn*. É difícil imaginar uma boa representação do conjunto dos números reais por um diagrama desse tipo. No entanto, o texto dá particular importância a esses diagramas, apresentando uma quantidade enorme deles, todos muito bem desenhados e coloridos.

À página 6, na seção Subconjunto e Relação de Inclusão, o texto indica que um conjunto A é um subconjunto de um conjunto B da seguinte forma:

$$A \subset B \;\Leftrightarrow\; (\forall\, x,\, x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Essa notação carregada é um exemplo da preferência do autor pela ênfase maior na simbologia do que nos significados.

Ainda na página 6, a 4ª observação diz que o conjunto vazio é um subconjunto de qualquer conjunto, mas não fornece qualquer explicação para esse fato. Por outro lado, a inclusão óbvia de um conjunto em si próprio não é mencionada.

Na seção 1.7 (Igualdade de Conjuntos), à página 7, é apresentada a seguinte definição de igualdade de conjuntos:

> "Dois conjuntos A e B são *iguais* se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$. Indicamos essa igualdade por: $A = B$".
>
> "Observe que, com a definição anterior, queremos dizer que dois conjuntos são iguais quando têm os mesmos elementos, ou seja:
>
> $$A = B \;\Leftrightarrow\; (\forall\, x,\, x \in A \Leftrightarrow x \in B)."$$

Essa definição é complicada e pouco natural: quando escrevemos $A = B$ referindo-nos a dois conjuntos, queremos simplesmente dizer que são o mesmo conjunto; conseqüentemente, têm os mesmos elementos. Na linguagem dos conjuntos isso significa que todo elemento de B é também elemento de A e que todo elemento de A é também elemento de B, ou seja, $A \subset B$ e $B \subset A$. A opção adotada pelo texto é, portanto, desnecessariamente complicada, e a definição é apresentada com mais ênfase nos símbolos do que no significado. Além disso, há a utilização da expressão "se, e somente se" numa definição, prática adotada pelo autor em todo o volume. Essa utilização não é, a rigor, incorreta, porém não é apropriada no caso de definições, que em Matemática significam dar nome a um conceito. Quando se escreve "se, e somente se" numa definição, ela se torna parecida com uma proposição que pode ser demonstrada.

As seções 1.9 e 1.10 abordam, respectivamente, a interseção e a união de conjuntos; as propriedades dessas operações são listadas sem qualquer espécie de justificativa.

Na seção 1.11, o texto fala de complementar do conjunto B em relação ao conjunto A no caso em que B é um sub-conjunto de A. Na verdade, a noção de complementar de um conjunto adquire sentido e utilidade quando se fixa um conjunto-universo U. Neste caso, a noção é útil, pois o conjunto complementar de um conjunto A pode ser visto como aquele cuja propriedade definidora é a negação da propriedade que define o conjunto A. Daí decorre que a importante noção de contrapositiva de uma implicação pode ser traduzida em termos dos complementares de dois conjuntos. Essa noção não é referida pelo texto em nenhum momento, e assim, parece sem sentido ficar manipulando complementares de conjuntos, como propõem os exercícios da seção. Um exemplo da falta de simplicidade do autor em relação à noção de complementar é o exemplo 1 da página 13, no qual, dados os conjuntos $A = \{2, 5, 7, 9\}$ e $B = \{5, 7\}$, encontra-se o complementar de B em relação a A, (a diferença $A - B$, que de imediato percebemos que é o conjunto $\{3, 9\}$) por meio da tabela:

	A	B
3	$\in$	$\notin$
5	$\in$	$\in$
7	$\in$	$\in$
9	$\in$	$\notin$

O uso desse tipo de recurso torna visível mais uma vez a predileção do autor pelo enfoque formalista, característico do movimento da Matemática Moderna.

Na seção 1.13 (Número de Elementos da união de conjuntos), apresenta-se, sem explicação, a fórmula para encontrar o número de elementos da união de dois conjuntos *finitos*, porém o texto não ressalta que os conjuntos devam ser desse tipo. O texto contém ainda a fórmula correspondente ao caso do número de elementos da união de três conjuntos, também sem justificativa. A seção mostra problemas interessantes de contagem, mas os exemplos são resolvidos simplesmente por meio da aplicação das fórmulas e dos diagramas de Venn, configurando novamente um modo formalista de focalizar os problemas e conceitos.

Todo o capítulo exibe páginas e páginas desses diagramas de apresentação gráfica atraente; no entanto, essas ilustrações não nos parecem significativas quando se trata de compreender o significado do conteúdo de conjuntos dentro do quadro da Matemática do Ensino Médio.

Resumindo o que dissemos, este capítulo adota uma abordagem centrada na simbologia e no formalismo; os exercícios são em sua maioria desinteressantes, não é estabelecida a correspondência entre a linguagem dos conjuntos e as noções lógicas. Pouca coisa do que aqui se apresenta com tanto destaque será usada nos outros capítulos, e assim, fica muito difícil para o estudante entender a razão do estudo dos conjuntos. Por outro lado, no primeiro capítulo de uma obra que trata da Matemática no Ensino Médio, seria muito desejável que o autor explicasse claramente o que é uma definição matemática. Conviria também descrever a noção de proposição, e distinguir os axiomas e os teoremas. As noções de proposição contrária e de proposição recíproca também mereciam que o autor lhes dedicasse algumas linhas.

Capítulo 2. Conjuntos Numéricos

O capítulo começa com uma seção intitulada “A invenção dos números”, na qual o número é apresentado como tendo surgido a partir da necessidade da contagem. O texto diz também que os sistemas de numeração apareceram em conseqüência das atividades humanas, que os números têm ao longo do tempo fascinado os matemáticos e que somente no século XIX se buscou uma organização para eles. No entanto, não é feita qualquer referência à outra necessidade que originou números, que é a de fazer medições.

Há uma seção dedicada a cada um dos seguintes conjuntos numéricos: naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais. Em cada uma dessas seções, o autor se refere à representação de números dos respectivos conjuntos na reta numérica, apresentando figuras com números representados numa reta orientada; porém, falta uma explicação sobre como se fazem tais representações, ou seja, não há menção à origem, unidade de comprimento e sentido de percurso para qualquer dos casos.

Como muitos outros autores, este adota um excesso de notações para os conjuntos numéricos: aparecem $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Z}_+^*$, $\mathbb{Z}_-^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_-$, $\mathbb{Q}_+^*$, $\mathbb{Q}_-^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$ e $\mathbb{R}^*$. Essas notações são requeridas em alguns dos exercícios propostos no livro, mas o exagero de símbolos não contribui, a nosso ver, para que o leitor conheça melhor os conjuntos numéricos, apenas reforça um aspecto formalista característico do movimento da Matemática Moderna.

Na seção que focaliza os números racionais, são dados dois exemplos de cálculo da fração geratriz de uma dízima periódica. Entretanto, além de o texto não apresentar qualquer explicação a respeito das representações decimais, não há referência à caracterização dos números racionais como aqueles números cuja representação decimal é finita ou periódica. (Ver A Matemática do Ensino Médio, volume 1, capítulo 4.)

Na seção 2.5 (Os números irracionais), após mostrar como exemplos de números irracionais os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $-\sqrt{7}$ e π com suas representações decimais com 7 algarismos, o texto diz à página 37:

"Observe que todo número irracional está representado na forma decimal, com infinitos algarismos, e não apresenta periodicidade."

Tal observação é impossível, mesmo que consideremos apenas os quatro exemplos apresentados, pois como poderíamos garantir que não há periodicidade em qualquer das representações? O que assegura que todos os irracionais têm representação decimal não periódica é a caracterização dos racionais que, como dissemos, não foi mencionada pelo texto.

Na página 38, nos exercícios propostos P.7 e P.8, o estudante é solicitado a classificar alguns números como racionais ou irracionais, mas o que é desenvolvido no capítulo não lhe dá fundamentação para isso. Por exemplo, a única maneira de classificar o número 2,8284271... (P.8, item d) é recorrer à seção de respostas do livro, onde ele é apresentado como irracional.

Ainda na seção 2.5, o texto diz, sem qualquer justificativa, que Pitágoras e seus seguidores descobriram que a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles de catetos de medida unitária não era um número racional, pois não há um número racional cujo quadrado seja 2, o texto continua:

"Este fato gerou uma grande polêmica entre os matemáticos da época.

Este e outros problemas puderam ser resolvidos com o auxílio de um novo tipo de número: o *número irracional.*" (p. 37).

Dessa forma, o número irracional é apresentado apenas como um número que não é racional. Conseqüentemente, o conjunto dos números reais é visto somente como a reunião dos racionais e irracionais, sem que se evidencie que seus elementos resultam das medições de comprimento: os racionais expressam as medidas dos segmentos comensuráveis com a unidade de comprimento escolhida, ao passo que os irracionais representam as medidas dos segmentos que são incomensuráveis com essa mesma unidade. A falta de referência a esse significado dos reais torna incompreensível o trecho a seguir, extraído da seção 2.6:

"Se representarmos todos os números racionais numa reta, sobrarão pontos da reta que não estarão associados a nenhum número racional. Mas, se representarmos, também, todos os números irracionais nessa mesma reta, então não sobrará nenhum ponto que não seja representação de um número. Portanto cada ponto da reta é a representação de um número racional ou de um número irracional.

Esta reta é denominada *reta real.*" (p. 39).

Um último comentário é que o texto não fornece o critério para comparar dois números reais a e b por meio de suas representações decimais — o único critério apresentado é o geométrico: $b > a$ quando b está representado na reta à direita de a e $b < a$ quando b está representado na reta à esquerda de a. Como ficou implícito que os racionais são os que têm representação decimal finita ou periódica e os irracionais são os que têm representação decimal não periódica, não é claro como podemos comparar dois números reais quaisquer.

Capítulo 3. Relações

Capítulo 4. Estudo das Funções

O Capítulo 3 é composto por 14 páginas que se subdividem em 10 pequenas seções nas quais são abordadas as noções de par ordenado, produto cartesiano e relação binária. Essas noções são apresentadas para que posteriormente o autor possa utilizá-las para definir função como um caso particular de relação binária, o que de fato acontece na seção 4.4 do capítulo seguinte. Fazemos duas observações relativas ao Capítulo 3.

- À página 51, a fórmula para o cálculo do número de elementos do produto cartesiano de dois conjuntos (finitos, o que não é dito no texto) é generalizada a partir de um único exemplo, sem qualquer explicação.
- À página 55, o autor define relação do conjunto A no conjunto B como todo subconjunto R do produto cartesiano $A \times B$ e completa: "R é relação de A em $B \Leftrightarrow R \subset A \times B$."

Pensamos que não é conveniente o uso da expressão "se, e somente se" ou de seu símbolo em uma definição como aqui.

A definição de função como caso particular de relação binária, além de formalista e desnecessária, tem um caráter estático que se opõe à idéia intuitiva de função como uma transformação, uma dependência, variação ou resultado de um movimento, e pode ser substituída vantajosamente pela seguinte: "Uma função do conjunto A no conjunto B é uma regra que diz como associar a cada elemento x de A um elemento y de B." Para indicar a função, escreve-se: $f\colon A \to B$. Na verdade, esta é a definição que o autor usa na seqüência do texto toda vez que menciona uma função.

Em nossa opinião, o conceito de relação poderia ser simplesmente suprimido do livro, sem qualquer prejuízo para o entendimento da matéria. Importante seria deixar bem claras as noções de domínio, contra-domínio e conjunto dos valores (ou imagem) de uma função.

Após a apresentação de vários exemplos de funções nessa acepção geral, deve ser feita a observação da página 64, na qual se define "função real de uma variável real". Deve acrescentar-se que estas são as funções mais importantes neste livro e que elas constituirão o conteúdo de vários dos capítulos seguintes.

Voltando ao texto, observamos que a seção 4.5 (Valor numérico de uma função) é apenas uma coleção de exemplos e exercícios de manipulação, enquanto a seção 4.6 aborda os conceitos de domínio, contra-domínio e conjunto imagem de uma função de forma algo complicada. Todos os exemplos apresentados se apóiam nos "diagramas de flechas", o que pode sugerir que só por meio deles podemos identificar o domínio, o contra-domínio e a imagem de qualquer função.

Na seção 4.7 (Comentário sobre o domínio de uma função), são dados vários exemplos de funções definidas por expressões algébricas, e o texto procura extrair uma regra para cada caso, enunciando-a e destacando-a num retângulo. Já na página 80, aparece uma nova regra: trata-se do "método prático" para decidir se o gráfico de uma relação no plano cartesiano é ou não o gráfico de uma função. Acreditamos que a ênfase no estabelecimento de regras não contribui para a aprendizagem, podendo, ao contrário, levar o estudante a pensar que o conhecimento da Matemática só é alcançado mediante a memorização de muitas regras e fórmulas.

Os outros aspectos referentes a este capítulo são:

- O uso inadequado da terminologia "raízes de uma função" (p. 87); a linguagem mais apropriada é "zeros de uma função".
- À página 89, o texto define função par e função ímpar, sem considerar que tais definições só fazem sentido no caso em que o domínio é simétrico em relação à origem, isto é, se x pertence ao domínio, o mesmo acontece com $-x$.
- Na seção 4.15 (Função crescente e função decrescente), à página 91, após verificar que para um exemplo particular de função e valores particulares x_1 e x_2 tem-se $f(x_2) > f(x_1)$ para $x_2 > x_1$, o autor afirma: "Nesse caso, dizemos que a função é crescente no intervalo considerado."

Embora logo depois o texto apresente a definição correta de função crescente, a afirmativa, da forma como está colocada, é incorreta.

Quanto aos exercícios, a maior parte é de manipulações, como por exemplo os que solicitam que se calcule o valor numérico de funções, que se ache o domínio de funções definidas por expressões algébricas, que se construam diagramas de flechas para decidir se uma relação binária é função.

O capítulo não contém exemplos de funções que não sejam dadas por fórmulas ou diagramas de flechas. Seria bom que o autor apresentasse exemplos de funções definidas por leis arbitrárias, como por exemplo $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tal que $F(x) =$ maior número inteiro que não supera x.

O texto não se preocupa em chamar a atenção do leitor para a importância das funções. Pode-se até afirmar, sem perigo de exagero, que as funções são os objetos mais importantes da Matemática.

Nota-se, ainda, nesse capítulo dedicado às funções, a falta de referência à interessante e útil idéia de *restrição* de uma função a um subconjunto do seu domínio.

Capítulo 5. Função do 1º grau ou Função Afim

As funções afins são as funções do tipo $y = ax + b$ onde a e b são números reais quaisquer. Dessa forma, são funções afins as funções constantes ($a = 0$) e as funções polinomiais do 1º grau ($a \neq 0$). Neste livro o autor opta por não considerar as funções constantes como afins, caracterizando uma fragmentação de idéias que pensamos não ser conveniente ao ensino.

O texto faz uso das denominações incorretas "função do 1º grau" para designar a função afim, e "raiz" para nomear um zero da mesma função.

Na seção 5.3 (Gráfico de uma função do 1º grau), após apresentar dois gráficos de funções afins, o autor afirma à página 104:

"Observando os gráficos, podemos tirar uma importante conclusão:
O gráfico da função $y = ax + b$ ($a \neq 0$) é uma *reta não-paralela* ao eixo Ox nem ao eixo Oy."

Utilizando apenas a fórmula da distância entre dois pontos no plano (que o autor adia para o Volume 3 da coleção, mas que poderia perfeitamente ser apresentada antes), pode-se demonstrar, de maneira muito simples, que o gráfico de qualquer função afim é uma reta. (Ver A Matemática do Ensino Médio, volume 1, p. 89). Este é um procedimento muito mais adequado do que tirar uma conclusão a partir de dois exemplos.

Outro ponto observado é que não há destaque quanto ao significado gráfico ou numérico dos coeficientes a e b da função afim, embora na seção 5.5 seja bastante salientada a importância do sinal de a para identificar se a função afim é crescente ou decrescente.

A função linear (caso $b = 0$ da função afim $f(x) = ax + b$) é mostrada como uma função afim cujo gráfico é uma reta que passa pela origem, mas o texto não faz referência a ela como modelo matemático para os problemas de proporcionalidade, noção das mais importantes no ensino da Matemática elementar que faz parte dos programas do ensino fundamental. Assim, perde-se uma ótima oportunidade de estabelecer vínculos entre os conteúdos que são focalizados em diferentes momentos na escola básica.

A seção 5.8 (Aplicações Práticas da Função do 1º grau) apresenta alguns exercícios envolvendo situações significativas como o movimento retilíneo uniforme, a distensão de uma mola, o preço a ser pago por uma corrida de táxi, etc., que são modeladas pelas funções afins.

O restante do capítulo (seções 5.9 a 5.13) é dedicado à abordagem das inequações do 1º grau, o que é feito mediante um enfoque fragmentado, centrado em exemplos de diversos tipos de inequações que são resolvidas de modo formalista e esquematizado.

Finalmente, na seção 5.15 (Questões de Revisão e Aprofundamento), a maior parte dos exercícios é de manipulação, com exceção de quatro problemas interessantes: P.40, P.44, T.29 e T.33.

Capítulo 6. Função do 2º grau ou Função Quadrática

O título do capítulo usa novamente uma terminologia inadequada — "função do 2º grau"; a denominação correta é "trinômio do 2º grau" ou "função quadrática".

O capítulo inicia-se sem a presença de um problema que precise ser modelado por uma função quadrática, mas apresenta dois exemplos importantes dessa função: a área de um disco como uma função quadrática de seu raio, e o espaço percorrido por um corpo abandonado em queda livre no vácuo como uma função quadrática do tempo.

O estudo da função quadrática teve a origem na resolução da equação do segundo grau, que em geral é estudada na 8ª série do ensino fundamental. Talvez supondo que parte do estudo dessa função já tenha sido feita nessa série, o autor não se preocupa em dizer de onde vieram não só as fórmulas para as raízes da equação (ou zeros da função), como também as das coordenadas do vértice do gráfico e a razão por que a reta vertical que passa por esse vértice é eixo de simetria do gráfico. Da mesma forma, o texto apresenta o gráfico do trinômio nos casos $a > 0$ e $a < 0$ com destaque para a imagem da função escrita na forma de intervalo, mas não mostra por que razões esse intervalo é de fato a imagem.

O completamento do quadrado na expressão da função leva à sua forma canônica, que permite chegar a todos esses fatos não justificados no texto de maneira simples, como é feito, por exemplo, em A Matemática do Ensino Médio, volume 1, capítulo 6.

Contudo, a opção adotada de não apresentar o completamento acaba por transformar o capítulo num amontoado de resultados sem justificativa, como se tudo já fosse conhecido e compreendido pelo aluno, e o texto tivesse o papel único de organizar tais resultados de forma resumida.

As relações entre os coeficientes e as raízes do trinômio, que podem ser obtidas imediatamente a partir da fórmula que dá as raízes, também aparecem sem justificativa, embora o texto diga que é importante relembrá-las e até acrescente uma fórmula para a diferença das raízes. Nessa seção, à página 144, apresentam-se várias "conclusões importantes" que decorrem das relações entre coeficientes e raízes. Essas conclusões são colocadas em destaque e podem levar o aluno (e mesmo o professor) a pensar que devem ser memorizadas por serem mesmo importantes. Entretanto, não conseguimos perceber os motivos desse destaque.

Apesar de mencionar as relações entre coeficientes e raízes, o texto não apresenta a função quadrática na forma fatorada.

Na página 143, há um exemplo no qual se pede o cálculo dos zeros (chamados inadequadamente de raízes da função, em todo o capítulo) da função $f(x) = x^2 - 4x + 4$, e o texto usa para isso a fórmula de Bhaskara, em vez de observar que se trata do quadrado perfeito $(x-2)^2$.

O capítulo apresenta alguns problemas interessantes de maximização de áreas de figuras geométricas, nos quais é necessário expressar essas áreas por funções quadráticas.

A maior parte dos problemas, porém, é formada por aplicações que não são verdadeiras aplicações, pois dá-se uma fórmula e fazem-se perguntas sobre a mesma dentro de um contexto. Com exceção dos problemas de áreas mencionados no parágrafo anterior, há um único problema no qual a expressão da função não é dada: é o exemplo 5 da página 154, sobre o lucro mensal de um fabricante de calçados.

Todo o capítulo contém ilustrações bem feitas, em particular aquelas que se relacionam com o estudo do sinal da função quadrática. No entanto, os resultados desse estudo são expressos somente através de símbolos. Parece-nos que o conhecimento do sinal da função seria mais bem esclarecido por meio de palavras, como por exemplo: no caso de raízes reais distintas, $f(x)$ tem o mesmo sinal de a quando x está fora do intervalo das raízes, e $f(x)$ tem sinal oposto ao de a quando x está entre as raízes.

Como no capítulo anterior, o estudo das inequações (agora do 2º grau, nada mais que uma aplicação do estudo do sinal da função quadrática), é apresentado de forma fragmentada: há três seções dedicadas a esse tema: Inequações do 2º grau, Inequações-Produto e Inequações-Quociente e Sistemas de Inequações. Essa escolha de repartir muito os conteúdos pode levar a uma impressão falsa de "grande quantidade de matéria", o que pode ser desmotivador.

Devemos ainda registrar o uso de uma linguagem incorreta no problema 48 da página 170, no qual é usada a expressão "uma parábola de função $y = \ldots$". Seria melhor substituí-la por "o gráfico da função $y = \ldots$".

De um ponto de vista geral, esse capítulo se ressente da apresentação de muitos resultados desacompanhados de justificativa, que poderiam ter sido mostrados de modo simples e elegante com a utilização da forma canônica do trinômio.

Merecem elogios as ilustrações e alguns dos problemas de máximos e mínimos de natureza geométrica.

Capítulo 7. Função Modular

Neste capítulo, entendemos que o livro chama funções modulares àquelas que envolvem o valor absoluto de uma expressão em que a variável é um número real, embora o que esteja chamado "função modular" de acordo com o texto, seja apenas a função $f(x) = |x|$.

O texto se inicia pela definição do módulo ou valor absoluto de um número real. Após essa definição, apresentam-se quatro exemplos e o texto diz que pelos exemplos, podemos notar que o módulo de um número real é sempre *não-negativo*. Lembremos que essa propriedade pode ser percebida imediatamente pela definição e que pelos exemplos não podemos garantir a sua validade.

Sem preocupar-se em apresentar a interpretação geométrica do valor absoluto de um número como a distância da origem ao ponto que lhe corresponde na reta, o texto prossegue mandando o leitor observar que se a é um real positivo, $|x| < a$, se e somente se, $-a < x < a$, e $|x| > a$, se e somente se, $x < -a$ ou $x > a$. A observação e conclusão devem ser feitas, supõe-se, articulando a definição do valor absoluto com as ilustrações. Isso não é evidente, e o que de fato possibilita concluir a equivalência das desigualdades aqui envolvidas é a interpretação do valor absoluto como distância.

O capítulo continua com a apresentação de funções "modulares", isto é, funções obtidas colocando as barras de valor absoluto em expressões do tipo $ax + b$ ou $ax^2 + bx + c$ e suas combinações. Os exemplos são todos ilustrados e resolvidos utilizando-se a definição de valor absoluto e exprimindo novamente as funções tirando-se as barras. Seria interessante que o texto chamasse a atenção para as situações em que o gráfico das funções é obtido por simples translações do gráfico de $|x|$ no plano, mas isso não é feito.

Surgem em seguida as equações modulares, em cuja resolução o texto afirma que será aplicada a seguinte propriedade: $|x| = a$, se e somente se, $x = a$ ou $x = -a$, $a > 0$. Mas essa propriedade tão simples não apareceu logo após a definição do valor absoluto e aqui surge de repente sem justificativa. O mesmo tipo de coisa acontece em relação às inequações modulares.

O capítulo contém então uma grande quantidade de exemplos de equações e inequações modulares com desenhos e quadros-resumo e, como sempre um número enorme de exercícios do mesmo tipo para o estudante.

As desigualdades $|x + y| \leq |x| + |y|$ e $|x - y| \geq |x| - |y|$, para quaisquer x, y reais aparecem apenas num exercício (p. 173) no qual o leitor é solicitado a verificar se são verdadeiras atribuindo valores reais a x e a y. Ora, podemos atribuir a x e y uma enorme quantidade de valores, verificar que as sentenças são verdadeiras para tais valores, e ainda assim, não estaríamos habilitados a dizer se as sentenças são sempre verdadeiras. Se o autor considera que não é interessante demonstrar essas desigualdades no livro, poderia pelo menos ter dito que isso pode ser feito. A opção que adotou carrega a possibilidade do engano grave de concluir-se um fato geral a partir de um número finito de exemplos.

Na verdade, o valor absoluto e suas propriedades são assuntos importantes, que caso sejam abordados, demandam um tratamento mais rigoroso por parte dos textos. A maneira como eles aparecem aqui sugere apenas um preocupação em apresentá-los porque são conteúdos exigidos por alguns exames vestibulares.

Capítulo 8. Composição de Funções e Função Inversa

O capítulo se inicia com um problema que pretende motivar a composição de duas funções através da discussão de uma situação real: o cálculo do preço da aquisição de um certo número de garrafas de refrigerante quando o consumidor entrega ao posto de venda o vasilhame correspondente. A preocupação em motivar a introdução de um conceito através da apresentação de uma situação que ocorre no cotidiano ou num contexto científico deve ser louvada. No entanto, deve haver cuidado no sentido de mostrar situações reais e bem explicadas, o que infelizmente não ocorre nesse exemplo, que transcrevemos a seguir (p. 196).

> "Um consumidor vai ao supermercado comprar, entre outras coisas, x garrafas de refrigerantes.
>
> Antes de iniciar as compras, ele deposita esses x vasilhames e, em troca, recebe um tiquete que lhe dá o direito a um desconto de 25% do valor de cada refrigerante, que custa R$ 0,80 (vasilhame + líquido).
>
> Indicamos essa função por $f(x) = 0{,}20 \cdot x = t$.
>
> Mais tarde, no caixa, o consumidor paga 75% do preço de cada refrigerante (somente pelo líquido), ou seja, $3t$ reais, que indicamos por $g(t) = 3t\%$."

Em seguida, apresenta-se um diagrama de flechas para tentar mostrar que a variável x é transformada pelas funções f e g no preço final a ser pago no caixa pelo consumidor: $g(t) = 3t = 3 \cdot 0{,}20 \cdot x$, e o texto continua:

> "A função que indica a quantia que o consumidor paga em cada refrigerante (somente pelo líquido) é dada por $h(x) = 3 \cdot 0{,}20 \cdot x$, isto é, $h(x) = 0{,}60 \cdot x$.
>
> A função h é denominada *função composta de g com f*."

Existem alguns problemas com esse exemplo. Em primeiro lugar, ele não trata de uma situação da prática diária, pois o preço final de um bem não é calculado como o produto do desconto pelo fator que o relaciona com o preço inicial. Dessa forma, embora o desconto obtido em x garrafas na situação apresentada seja de fato R$ 0,20$\cdot x$ (que corresponde a 0,25 $\cdot$ R$ 0,80 $\cdot x$, ou seja, 25% do valor de cada refrigerante (R$ 0,80), na prática, o valor a ser pago é calculado subtraindo-se do valor total (no caso, R$ 0,80 $\cdot x$) o desconto (0,25 $\cdot$ R$ 0,80 $\cdot x$). Isso porque, numa situação geral, a relação entre o desconto e o preço a ser pago envolve multiplicar o desconto por um fator "mais complicado" do que 3. Explicando melhor, se o desconto é de $p\%$ e o preço por unidade é y, o desconto em x unidades é $(p/100)\cdot y\cdot x$; o preço final a ser pago é $(1-p/100)\cdot y\cdot x$. Assim, o fator envolvido no caso geral é $(100-p)/p$.

Em segundo lugar, além de estar colocada uma situação artificial, a redação do texto é confusa, pois ele não diz o que é a função f (trata-se da função que dá o desconto obtido para x garrafas) e o que é a função g (trata-se agora da função que faz corresponder ao desconto o preço final), de maneira que fica difícil para o leitor acompanhar a composição de funções que o problema pretende ilustrar. Além disso, aparece o valor R$ 0,20 como apenas 0,20, o que claramente obscurece o significado pretendido.

O texto segue definindo a composição de funções sem qualquer vinculação ao problema que motivaria essa operação. E, na definição de função composta, dada na página 197, o autor comete uma falta ao dizer que "a composição de g com f será indicada com $g\circ f$". Tradicionalmente, a notação $g\circ f$ indica a composta de f com g, nesta ordem. Tem-se:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)),$$

ficando claro que se aplicou ao elemento x a função f e, em seguida, se aplicou ao elemento $f(x)$ a função g.

Na página 198, após o exemplo 2, há um engano na frase que diz que a composta das funções f e g, nesta ordem, existe, *se e somente se* (o uso dessa expressão aqui não é adequado, por tratar-se de uma definição, mas não é este o ponto principal a ser comentado) o contra-domínio de f é igual ao domínio de g. Na verdade, para que essa composta exista, é suficiente que a imagem de f seja um subconjunto qualquer do domínio de g.

Na seção 8.2 são trabalhados os importantes conceitos de função injetiva, sobrejetiva e bijetiva, ou, respectivamente, como prefere o autor, injetora, sobrejetora e bijetora. Infelizmente, a abordagem adotada deixa a desejar, uma vez que o texto procura utilizar sempre, provavelmente no intuito de facilitar a compreensão desses conceitos, os "esquemas" ou "diagramas" de flechas. Pensamos que, ao contrário de esclarecer as idéias envolvidas, o recurso constante a essas figuras pode prejudicar o entendimento.

Ao introduzir a função injetora, por exemplo, o autor apresenta dois diagramas desse tipo, no qual são representados dois conjuntos A (domínio) e B (contra-domínio), pedindo ao leitor que observe que "Não importa que em B 'sobrem' elementos (figura 1)." De fato, para que a função seja injetiva, não é necessário que todos os elementos do contra-domínio sejam imagens de algum elemento do domínio. Entretanto, ao chamar a atenção para esse detalhe de uma das figuras, pode ser que o autor desloque a atenção do leitor para algo que não é o mais importante na definição da função injetiva; para essas funções, o que é essencial é que elementos distintos no domínio sejam transformados por elas em elementos distintos no contra-domínio.

Apresentando a definição de função injetiva, o texto adota, mais uma vez inadequadamente, o símbolo $\Leftrightarrow$.

Seguindo, há diversos exemplos na forma de "esquemas de flechas", todos de funções que têm como domínio e contra-domínio conjuntos finitos de números inteiros. Devemos lembrar que as funções que são realmente importantes no ensino médio são as funções reais de uma variável real, em que o domínio, via de regra, não é um conjunto finito de números inteiros.

Considerando-se que em capítulos anteriores já foram focalizadas funções afins, quadráticas e combinações delas, o texto poderia, neste momento, apresentar exemplos de funções injetivas que as envolvessem.

Ainda em relação ao tópico das funções injetivas, a definição adotada, embora excessivamente carregada com parênteses e símbolos, diz corretamente que $f\colon A \to B$ é injetora quando cumpre a condição $x \neq x'$ em $A \Rightarrow f(x) \neq f(x')$. Mas, na prática, quando se quer mostrar que uma função é injetiva, o que se usa é a contrapositiva dessa implicação: $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$. Seria interessante que o texto fizesse referência a esse fato.

Para as seções destinadas às funções sobrejetivas e bijetivas valem observações análogas quanto ao excesso de exemplos apresentados na forma de diagramas de flechas e também daqueles em que o domínio e o contra-domínio são conjuntos finitos de números, quase sempre inteiros.

Depois de muitos desenhos de bolinhas e setinhas, o texto se propõe a ensinar a "classificar" as funções quanto à injetividade, sobrejetividade e bijetividade, primeiro "por meio do gráfico", e depois "pela lei de formação". Essa abordagem fragmentada também não nos parece conveniente, pois pode transmitir uma idéia (presente em todo este volume) de que a Matemática é um amontoado de regras e casos. Na verdade, bastaria trabalhar exemplos variados de funções dadas por gráficos e por suas expressões, e empregar corretamente os conceitos de função injetiva, sobrejetiva ou bijetiva, sem fazer tantas subdivisões no texto.

Vemos também alguns problemas na seção 8.3 (Função Inversa). O texto se inicia, após o título da seção, com

> "**Conceito** Existem funções que, sob certas condições, originam outras funções denominadas funções inversas."

Depois são apresentadas duas funções $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to A$ (na forma de diagramas de flechas) e elas são destacadas como conjuntos de pares ordenados:

$$f = \{(0,1), (2.5), (4,9)\}, \quad g = \{(1,0), (5,2), (9,4)\}.$$

Dizendo ao leitor que observe que o domínio de f é a imagem de g e, vice-versa, o texto orienta ainda para que se faça a seguinte observação:

> "Permutando-se os elementos em cada par ordenado da função f, obtém-se a função g, denominada *função inversa de* f, que indicamos por f^{-1}."

Consideramos quase impossível entender o que é a inversa de uma função com esse tipo de conceituação.

Depois disso, o texto lança a condição de existência da inversa: f tem inversa se e somente se f é bijetora, mas não explica por que.

A definição de função inversa de $f\colon A \to B$ como sendo a função $f^{-1}\colon B \to A$ tal que (a, b) é par ordenado de f, se e somente se, (b, a) é par ordenado da inversa não esclarece melhor o que foi dito antes.

Infelizmente, há ainda uma "Regra Prática para se obter a lei da função inversa", que para resolver os exercícios do livro pode até funcionar, mas não é possível entender o que se está fazendo.

Na verdade, uma definição adequada da inversa de uma função exige que se fale da função identidade, o que não é feito nesse texto.

É relevante observar que em todos os exemplos em que o aluno é solicitado a encontrar a expressão da inversa de uma função aparecem funções bijetivas, ou seja, não há necessidade de se analisar a existência ou não da inversa. Acreditamos que seria conveniente investir mais no entendimento do conceito do que nas manipulações e aplicações de "regras práticas", e assim, seriam oportunos exercícios nos quais se pedisse que o estudante examinasse a possibilidade ou não da existência da inversa de uma função.

Na página 217, o texto mostra o gráfico de uma função e de sua inversa referidos a um mesmo sistema cartesiano, e, depois de mandar observar que para cada par (x, y) da função tem-se que (y, x) é um par de sua inversa, diz que podemos concluir (a partir desse exemplo?) que o gráfico de uma função e o de sua inversa são simétricos em relação à bissetriz do 1º e do 3º quadrantes.

Na verdade, com a definição da inversa de f como sendo o conjunto de pares ordenados da forma (y, x) tais que (x, y) é um par ordenado da função f, a simetria afirmada não necessita do exemplo dado. O que falta mesmo aqui é mostrar que (a, b) e (b, a) são pontos do plano simétricos em relação à reta $y = x$.

As 5 páginas de "Questões de Revisão e Aprofundamento" fazem crescer ainda mais a já enorme quantidade de exercícios propostos ao final de cada uma das seções, os quais lamentavelmente pouco contribuem para a compreensão de tópicos tão importantes quanto os tratados neste capítulo.

Capítulo 9. Função Exponencial

O capítulo começa com uma pequena introdução histórica e continua com "uma breve revisão sobre potências". O livro define a^n para a real e n natural. Como o autor considera zero um número natural, nessa definição inclui $a^0 = 1$ para $a \neq 0$. Nenhuma justificativa é dada para isso.

Em seguida, para a real, $a \neq 0$, e n inteiro positivo, define-se $a^{-n} = 1/a^n$, também sem qualquer justificativa.

Mas logo depois, é apresentada a propriedade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (1), para $a \neq 0$ e m, n inteiros. Usando essa mesma propriedade que é imediata para m, n inteiros positivos, poder-se-iam justificar as duas definições anteriores, pois para que (1) continue válida também para o expoente zero, devemos ter $a^1 = a^{0+1} = a^0 \cdot a^1$, o que implica $a^0 = 1$, para $a \neq 0$.

Tendo convencionado a partir daí que $a^0 = 1$, para que (1) valha ainda para os inteiros negativos, precisamos ter $a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$ para $a \neq 0$ e n inteiro positivo. Segue daí a necessidade de definir $a^{-n} = 1/a^n$.

Continuando a "revisão sobre potências", o texto define a potência com expoente racional para a real positivo e m, n inteiros, $n > 1$ como $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, mas também não apresenta qualquer justificativa para essa definição. Embora uma tal justificativa exija um pouco de trabalho, pelo menos uma idéia poderia ser dada (ver o capítulo 2 do livro Logaritmos, da Coleção do Professor de Matemática, editada pela Sociedade Brasileira de Matemática).

Finalmente, o texto introduz a potência com expoente irracional de forma correta, usando aproximações por potências de expoente racional. Contudo, à página 232, o livro apresenta tabelas de valores racionais aproximados por falta e por excesso de $\sqrt{2}$ e de $5^{\sqrt{2}}$, e pede que o leitor observe que os valores das potências com expoentes racionais aproximados de $5^{\sqrt{2}}$ por falta ou por excesso convergem para um mesmo número. A nosso ver, como a tabela é constituída por poucos valores, a convergência não é tão facilmente visível.

O texto afirma, a partir de dois exemplos de gráficos de funções do tipo $f(x) = a^x$, onde a é real positivo diferente de 1 e x é real, que a exponencial é crescente se $a > 1$ e decrescente se $a < 1$. Apesar de concluído por meio de dois exemplos, isso é correto. Porém, não se observa que essa afirmativa significa que a função é injetiva, ainda que a injetividade de uma função tenha sido abordada no capítulo anterior. Mais adiante, na página 237, o texto diz que para resolver equações exponenciais aplicam-se as propriedades das potências e a propriedade

$$a^{x_1} = a^{x_2} \;\Leftrightarrow\; x_1 = x_2 \quad (a > 0 \text{ e } a \neq 1).$$

Não é feita qualquer relação com o que foi observado anteriormente a respeito do crescimento ou decrescimento da exponencial de acordo com a base.

Na página 234, o texto diz que a imagem da função exponencial de domínio $\mathbb{R}$ e contra-domínio $(0, +\infty)$ é $(0, +\infty)$, ou seja, a função é *sobrejetiva*. Mas essa palavra não é mencionada, mesmo tendo o capítulo anterior tratado do conceito de função sobrejetiva. A questão da sobrejetividade da exponencial é, de fato, talvez, delicada para ser demonstrada num texto para o ensino médio; no entanto, o autor poderia ter dito que essa demonstração é possível.

O capítulo contém três seções destinadas a manipulações de todo tipo envolvendo a função exponencial: Equações Exponenciais, Sistemas de Equações Exponenciais e Inequações Exponenciais.

Quanto às aplicações, aparecem algumas de maneira tímida na seção 9.6 em exemplos e exercícios todos acompanhados por fórmulas de funções exponenciais.

Capítulo 10. Estudo dos Logaritmos

Capítulo 11. Função Logarítmica

Capítulo 12. Sistemas de Logaritmos

Embora o Capítulo 8 verse sobre funções inversas e o Capítulo 9 estabeleça que a função exponencial $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$, é bijetiva (ainda que o texto não diga isso explicitamente), a introdução do logaritmo não é feita a partir da inversão da exponencial. Vejamos como o Capítulo 10 trata esse assunto. Na página 249, após apresentar uma tabela de logaritmos decimais e resolver a equação $3^x = 81$, o texto prossegue dizendo que a resolução de algumas equações do tipo $a^x = b$ é realizada com o auxílio do logaritmo, cuja definição é a seguinte:

> "Sejam a e b números reais positivos, com $a \neq 1$.
> Existe, e é único, o número real x tal que:
>
> $$a^x = b.$$

> O número $x \in \mathbb{R}$, que satisfaz a equação $a^x = b$, é por definição o logaritmo de b na base a e indica-se por
>
> $$x = \log_a b$$
>
> sendo que
>
> - x é o logaritmo ($x \in \mathbb{R}$)
> - b é o logaritmando ($b \in \mathbb{R}_+^*$)
> - a é a base do logaritmo ($0 < a \neq 1$).
>
> Generalizando, podemos escrever
>
> $$\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x$$
>
> ou seja: O logaritmo de um número b em uma certa base a é o expoente x que se deve atribuir a essa base para se obter o número b."

Essa estranha e longa definição afirma que "existe, e é único, o número real x tal que $a^x = b$ e não dá nenhuma justificativa para isso. Ora, este fato é verdadeiro exatamente porque a função exponencial $f\colon R \to (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$, é bijetiva.

Então, para cada b positivo, existe um único x real tal que $a^x = b$. Chamamos x de logaritmo de b na base a e escrevemos $\log_a b = x$.

Essa função que associa a cada número positivo o expoente a que se deve elevar a base a para obtê-lo é a função inversa da exponencial, que denotamos por $\log_a\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e a imagem de um número positivo x por essa função é indicada por $\log_a x$.

Com a abordagem adotada pelo autor, vamos percorrer da página 250 até a página 273 (já estaremos no Capítulo 11) até sabermos que o logaritmo é a função inversa da exponencial. Nessa página, o texto afirma que a função logarítmica é bijetora (nenhuma justificativa!) e tem como inversa a função exponencial. Após esboçar gráficos de exponenciais e logaritmos (para $a > 1$ e $0 < a < 1$) e observar que os gráficos de $y = a^x$ e $y = \log_a x$ são simétricos em relação à reta $y = x$, o texto faz a seguinte

> "Observação: A função exponencial $y = a^x$ também é bijetora e admite como função inversa a função logarítmica $y = \log_a x$."

São muitas as voltas e complicações ... E, em conseqüência dessa pouca clareza em relação à inversão de funções, que tem sua origem no Capítulo 8, quando a função identidade não é mencionada, as importantes igualdades

$$a^{\log_a x} = x, \quad \text{para todo } x > 0 \quad \text{e} \quad \log_a a^x = x, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

aparecem sem o destaque que merecem, numa lista de propriedades da seção 10.3, à página 250. Aí, o texto diz que são propriedades de "verificação imediata pela definição". De fato, são propriedades que decorrem imediatamente da definição, mas seria interessante que o livro se detivesse para mostrar pelo menos algumas, e que propusesse as outras como exercícios para o leitor. Contudo, não há qualquer preocupação neste sentido.

Na seção 10.4, o livro prova as propriedades operatórias dos logaritmos (logaritmo de um produto, de um quociente e de uma potência) usando as propriedades da exponencial das quais decorrem; porém, lembremos que no Capítulo 9 essas propriedades foram apenas mencionadas para expoentes inteiros, e nenhuma ênfase foi feita do fato de que se estendem aos expoentes reais.

Ainda no Capítulo 10, há uma seção onde se define o cologaritmo de um número b na base a. Qual é a utilidade dessa definição?

Além de todas as enormes listas de exercícios de manipulação reunidas ao final de cada uma das seções do mesmo capítulo, há a seção 10.7 — Questões que envolvem as propriedades operatórias — na qual aparecem 5 exercícios resolvidos e muitos outros propostos, mas nenhum deles apresenta qualquer novidade em relação aos das listas anteriores.

O autor encerra o capítulo Estudo dos Logaritmos, mas abre outro, intitulado Função Logarítmica. Neste, as duas primeiras seções contêm pouco texto e muitos exercícios que envolvem compostas de logaritmos com outras funções. A maior parte deles solicita que o leitor determine os domínios dessas funções.

O resto deste capítulo é constituído por três seções com muitíssimas manipulações: Equações Logarítmicas, Sistemas Logarítmicos e Inequações Logarítmicas. Observamos ainda a utilização da notação $\log x$ para a base dez, sem que isso esteja convencionado.

O Capítulo 12 começa abordando o sistema de logaritmos decimais e dedica um bom espaço a "característica e mantissa", "forma negativa e forma preparada de um logaritmo decimal", "tabelas logarítmicas", tópicos que stão muito desatualizados após a difusão das calculadoras, que são completamente ignoradas neste volume.

Existe ainda uma seção de aplicações do logaritmo decimal e outra de aplicações do logaritmo neperiano, onde surgem: pH, juros compostos, desintegração radioativa, intensidade sonora, crescimento populacional. Essa apresentação de muitas aplicações diferentes da exponencial (ou do logaritmo) é merecedora de elogios; vale observar, todavia, que embora apareçam alguns problemas propostos sem fórmulas a maior parte deles as traz.

O importante número e é apresentado de forma descuidada como sendo o irracional 2,718..., sem qualquer outra explicação, como por exemplo $e =$

$\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$, ou e é o único número real positivo b que torna igual a 1 a área da faixa de hipérbole formada pelo conjunto de pontos (x, y) do plano tais que x está entre 1 e b e $0 \leq y \leq 1/x$. (Ver A Matemática do Ensino Médio, volume 1, capítulo 8.)

Para concluir, observamos que nos Capítulos de 9 a 12 nenhuma menção é feita à propriedade característica das funções do tipo exponencial ($f(x) = be^{ax}$) que é a de que na seqüência $f(c), f(c+h), f(c+2h), \ldots$ cada termo é o anterior multiplicado por uma constante, ou seja, trata-se de uma progressão geométrica. É interessante lembrar que é essa propriedade que confere relevância às funções exponenciais (e logarítmicas), por fazer delas o modelo matemático adequado para representar tantas e tão variadas situações.

Capítulos 13 a 23. Trigonometria

A Trigonometria é apresentada em 204 páginas, que se distribuem em onze capítulos.

Há um evidente exagero tanto no que se refere ao número de páginas quanto ao de subdivisões do assunto. Esse tratamento, que é comum em nossos livros didáticos do ensino médio, complica desnecessariamente o estudo da trigonometria, pois estendendo-se muito em tópicos de pouca ou nenhuma relevância, o texto não deixa claro o que de fato é importante em relação ao conteúdo.

Embora a introdução do Capítulo 13 diga que a trigonometria nasceu como ferramenta da astronomia e que "é hoje uma disciplina bem estruturada e se destaca por suas inúmeras contribuições ao desenvolvimento de outras ciências" (p. 309), o texto não fornece maiores informações a respeito da importância das funções trigonométricas. No Capítulo 15, define-se função periódica e são abordados os períodos do seno, do cosseno e da tangente, mas não se diz que é exatamente pelo fato de serem periódicas que essas funções são apropriadas para descrever fenômenos como o movimento dos planetas, as vibrações sonoras, a corrente elétrica alternada, os batimentos cardíacos, etc.

O Capítulo 13 trata da trigonometria nos triângulos retângulos; as razões trigonométricas são apresentadas a partir da semelhança de triângulos, porém, o texto trabalha com um triângulo retângulo particular cujos lados têm medidas dadas, e com três outros triângulos retângulos particulares obtidos pelo traçado de perpendiculares a um dos catetos. Seria desejável adotar um enfoque mais genérico, bem como enfatizar que as razões trigonométricas dependem apenas do ângulo agudo ao qual se referem, não importando, assim, as medidas dos lados do triângulo retângulo considerado.

Este capítulo contém alguns problemas interessantes, como os exemplos 1, 2, 4 (pp. 317–319), os exercícios propostos P.5, P.7, P.8. T.5, T.7 (pp. 320–321), P.11 (p. 322) e T.11 (p. 324). Contudo, faz falta a apresentação da relação fundamental $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$ (onde α é ângulo agudo de um triângulo retângulo), relação essa que depende apenas da definição das razões trigonométricas e do teorema de Pitágoras.

Uma aplicação simples e freqüente da trigonometria para a qual teria sido interessante chamar a atenção neste mesmo capítulo é o cálculo do comprimento da projeção ortogonal $A'B'$ de um segmento de reta AB sobre um eixo, quando AB forma um ângulo α com esse eixo: $\overline{A'B'} = \overline{AB}\cos\alpha$.

O Capítulo 14 começa dizendo que cada uma das partes em que uma circunferência fica dividida por dois quaisquer de seus pontos chama-se arco de circunferência. Há então o desenho de uma circunferência na qual estão marcados dois pontos A e B; de acordo com o que foi dito, existem dois arcos AB (cada uma das partes em que a circunferência fica dividida pelos pontos A e B). Todavia, AB, segundo o texto, é apenas o menor desses arcos.

Existe uma certa confusão em relação às expressões "medir um arco" e "medida de um arco", pois algumas vezes elas são usadas para o comprimento de um arco, e outras vezes não. É o que acontece na página 328, quando se define o radiano:

> "Além do grau, outra importante unidade de medida de arco é o *radiano*. Seja AB um arco de uma circunferência de raio r, tal que $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = r$" (aqui, trata-se do comprimento do arco AB). "Dizemos que o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 1 radiano (1 rad). Então definimos: Radiano é um arco de comprimento igual ao raio da circunferência que o contém."

A dúvida que se coloca é a seguinte: a medida de $\overset{\frown}{AB}$ afinal é r ou 1 radiano?

Somente na página 331 é que o texto faz menção ao ângulo central que subtende um arco da circunferência, dizendo que sua medida é igual à medida desse arco. Parece-nos mais natural e mais claro focalizar a situação do ponto de vista do ângulo central subtendido por um arco, como procuramos explicar a seguir, pois dessa forma, ao mesmo tempo em que evitamos a confusão entre o comprimento do arco e sua medida, compreendemos melhor o radiano.

Se C é uma circunferência de raio r, o comprimento ℓ do arco subtendido pelo ângulo central α é diretamente proporcional a r e à medida do ângulo α. Indicando por α também a medida do ângulo central e supondo que ℓ e r são medidos com a mesma unidade, temos $\ell = c \cdot \alpha \cdot r$, onde a constante de proporcionalidade c depende da unidade escolhida para medir ângulos. O radiano é a unidade de medida de ângulos tais que $c = 1$. Portanto, quando se mede α em radianos, tem-se $\ell = r\alpha$. Notemos que quando $r = 1$ e o ângulo é medido em radianos, teremos $\ell = \alpha$, ou seja, a medida do ângulo em radianos coincide com o comprimento do arco.

Para um raio r qualquer segue imediatamente que o ângulo central de 1 radiano subtende um arco de comprimento igual ao raio da circunferência e também que a medida em radianos do ângulo completo (que subtende toda a circunferência) é 2π. Daí se estabelece a relação (a palavra "equivalência", utilizada à página 329, é inadequada) entre o grau e o radiano.

Para desenvolver a Trigonometria, é claro que se pode falar também em "medida de arco" (igual à medida do ângulo central que subtende), mas começar pela idéia de medida de arcos sem falar-se no ângulo central talvez torne os desenvolvimentos mais complicados.

Uma outra maneira de se abordar o radiano é a que está exposta no capítulo 9 do volume 1 de A Matemática do Ensino Médio — por meio da função de Euler. Este é um modo elegante para definir o radiano, que permite, ao mesmo tempo, definir corretamente as funções seno e cosseno no conjunto dos números reais.

Como diversos outros livros brasileiros, este também adota a desnecessária expressão "ciclo trigonométrico" para designar a circunferência unitária de $\mathbb{R}^2$, isto é,

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$

para a qual convencionou-se o sentido anti-horário como o de orientação positiva.

Na seção 14.6 (Arcos trigonométricos), são dados vários exemplos de arcos cuja medida em radianos é sempre um múltiplo racional de π, o que pode conduzir os estudantes a estranharem, por exemplo, um arco ou ângulo de 2 radianos.

Na seção 14.7, é introduzida a expressão "arcos côngruos" para denominar arcos de mesma extremidade. Posteriormente, no Capítulo 15, após cada definição de seno, cosseno ou tangente, o texto dará destaque ao fato de que "arcos côngruos têm senos iguais, cossenos iguais e tangentes iguais", o que evidentemente é verdade, apenas essa ênfase parece tornar mais difícil algo tão simples.

Na seção 14.8, o texto fornece a expressão geral dos arcos côngruos a um arco de medida α_0, onde $0 \leq \alpha_0 < 2\pi$. Entretanto, no exemplo 3 da página 343, no item b), o valor de α_0 é $-\pi/4$.

No Capítulo 15, para definir o seno de um número real, o texto apresenta uma figura e diz:

"Há uma correspondência entre x e M, isto é, para cada número real x existe um e somente um ponto M." (p. 351).

Porém, às vezes x (que é a medida de um arco) é dado em graus, às vezes em radianos. Logo após dizer que o domínio da função seno é o conjunto $\mathbb{R}$ (à

p. 352), o texto apresenta o exemplo $\operatorname{sen} 180^\circ = \operatorname{sen} 900^\circ = 0$, embora 180° e 900° não sejam números reais.

Uma alternativa para evitar esse tipo de dificuldade seria estabelecer corretamente a correspondência entre números reais e pontos do círculo por meio da função de Euler.

Ainda no Capítulo 15, a tangente, a cotangente, a secante e a cossecante são definidas de maneira geométrica e não a partir do seno e do cosseno. Apenas no caso em que x é um arco do 1º quadrante, o texto prova a relação $\operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x / \cos x$. Para as outras funções trigonométricas, há somente a afirmação das relações $\operatorname{cotg}\ x - \cos x / \operatorname{sen} x$, $\sec\ x = 1/\cos x$ e $\operatorname{cossec}\ x = 1/\operatorname{sen} x$.

Apesar da presença do gráfico da tangente no intervalo $(-\pi/2, 5\pi/2)$, e não no intervalo $[0, 2\pi]$, como está escrito na página 382, não há explicação a respeito do comportamento da função nas proximidades dos pontos onde não está definida, seja em termos da definição geométrica, seja usando a relação $\operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x / \cos x$. As funções cotangente, secante e cossecante recebem um tratamento semelhante.

É somente no Capítulo 16, depois de 89 páginas de trigonometria, que aparece a relação fundamental $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$. As relações $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ e $\operatorname{cossec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$ são estabelecidas sem que se explicitem as condições $\cos x \neq 0$ e $\operatorname{sen} x \neq 0$, respectivamente.

No Capítulo 18, à página 426, seria desejável um texto que explicasse as construções feitas na figura. Nessa figura, a, b e $a + b$ são ângulos do 1º quadrante. Como seria a demonstração se a e b fossem ângulos quaisquer? O autor não manifesta a menor preocupação com tal problema.

Os capítulos mumerados de 18 a 21 são bem apresentados e ilustrados, com as habituais enormes listas de exercícios. As seções 18.4 e 18.5 dedicam um grande espaço às chamadas fórmulas de transformação em produto, e o texto afirma que essa "fatoração" é útil para adaptar expressões trigonométricas ao cálculo logarítmico. Atualmente, com a difusão das calculadoras e computadores, não é mais conveniente invocar essa razão para a apresentaçào dessas fórmulas. Na verdade, um grande problema dos livros didáticos em relação ao estudo da trigonometria é a abordagem de todas as fórmulas sem diferenciação: não fica claro para o estudante quais delas são as mais importantes, ou seja, aquelas das quais as outras são simples conseqüências.

No Capítulo 21, ainda que existam figuras bem feitas com os gráficos do seno, do cosseno, da tangente e de suas respectivas inversas arco-seno, arco-cosseno e arco-tangente, faltam considerações mais detalhadas sobre a inversão dessas funções, relacionando essa inversão com o conteúdo do Capítulo 8 (Composição de Funções e Função Inversa).

No Capítulo 22 (Resolução de triângulos quaisquer), na dedução da lei dos cossenos são considerados os casos em que o triângulo é acutângulo e obtusângulo, mas para a lei dos senos não é feito qualquer comentário quanto ao caso do triângulo obtusângulo. Seria interessante também que o texto fizesse uma discussão do problema geral de resolução de triângulos: dados três elementos de um triângulo, sendo pelo menos um deles um lado, calcular os outros elementos.

O Capítulo 23 é apenas mais uma lista de exercícios acrescentada às já muitas que integram os demais capítulos.

Considerações finais a respeito do volume

O livro apresenta boa qualidade gráfica, ilustrações bem feitas e uma revisão criteriosa quanto a erros gráficos e quanto à Língua Portuguesa.

Ainda que as notas sobre a História da Matemática incluídas no texto se mostrem de forma desconectada dos conteúdos, o esforço do autor merece elogios, já que as informações oferecidas tornam a Matemática visível como uma construção que vem sendo empreendida pela humanidade desde as civilizações mais antigas.

O volume contém algumas deficiências no que diz respeito à conceituação. Tais falhas foram apontadas na análise dos diversos capítulos. Não existe a preocupação de se estabelecerem ligações entre os conteúdos do volume nem entre esses e os assuntos do Ensino Fundamental. Devem ser registrados ainda os exageros na proposição de exercícios de manipulação e a presença de um número relativamente pequeno de aplicações.

Os traços mais característicos deste livro são a opção pela fragmentação dos conteúdos, a preferência por um enfoque formalista, com ênfase na simbologia, e uma preocupação manifesta em estabelecer regras para cada caso que se apresenta. São conseqüências dessas escolhas a perda do significado e o desaparecimento da organicidade do conteúdo. A profusão de exercícios, a maior parte deles pouco criativos, e a excessiva compartimentalização tornam quase impossível aos alunos (e até aos professores) distinguir no emaranhado de assuntos apresentados os resultados importantes dos que são meramente acessórios. Tudo isso dificulta uma visão mais abrangente da Matemática e conduz a um livro-texto volumoso em demasia.

Paulo Bucchi

Curso Prático de Matemática – volume 2

Introdução

Este livro é o segundo de uma coleção de três volumes destinados às três séries do Ensino Médio. Como acontece com o primeiro volume, ele é acompanhado por um "Livro do Professor" que não contém quaisquer sugestões, orientações ou recomendações ao mestre que resolver utilizar o texto em sala de aula, embora traga as soluções de alguns dos muitos exercícios propostos aos estudantes.

Este volume tem 365 páginas que constituem os seguintes 12 capítulos:

1. Progressões Aritméticas
2. Progressões Geométricas
3. Noções de Matemática Financeira
4. Matrizes
5. Determinantes
6. Sistemas Lineares
7. Análise Combinatória
8. Binômio de Newton
9. Probabilidades
10. Geometria Espacial de Posição
11. Geometria Espacial Métrica
12. Questões Complementares

O último capítulo não contém novos tópicos matemáticos; é apenas uma lista de exercícios referentes aos assuntos abordados nos dois primeiros volumes da coleção.

Como no primeiro volume, o autor introduz freqüentemente notas relativas à História da Matemática e à biografia de matemáticos importantes ao longo do texto. Este segundo livro também é fartamente ilustrado por fotografias e desenhos a cores; possui ainda uma diagramação muito bem feita, tudo isso resultando em uma excelente apresentação gráfica. A revisão de Língua Portuguesa do texto foi cuidadosamente realizada.

Os comentários e a análise do volume que se seguem referem-se ora a capítulos isolados, ora a grupos de capítulos que focalizam temas afins.

Capítulo 1. Progressões Aritméticas

Capítulo 2. Progressões Geométricas

O primeiro capítulo se inicia com uma abordagem da idéia de seqüência ou sucessão como "todo conjunto cujos elementos estão dispostos em uma determinada ordem" (página 2), ilustrando essa idéia por meio de seqüências de notas musicais e por uma seqüência de desenhos que pretendem mostrar a evolução da espécie humana.

Para introduzir as seqüências numéricas, dentre as quais se destacam as progressões aritméticas e geométricas, objeto de estudo dos dois primeiros capítulos do volume, o autor se refere a "padrões matemáticos" que são seguidos por "situações que ocorrem na natureza". Apresenta então exemplos que pretendem registrar a presença das seqüências numéricas não somente na natureza, mas também na História da Matemática (os números triangulares pitagóricos) e na vida econômica da sociedade contemporânea.

Finalmente, o texto define seqüências numéricas como "aquelas cujos termos são números reais" (página 4) e continua dizendo que dará maior importância às seqüências que obedecem a uma "lei de formação". Na verdade, toda seqüência tem que obedecer a uma lei de formação dos seus termos, ou seja, uma regra que permita dizer, para todo $n \in \mathbb{N}$, qual é seu n-ésimo termo. É provável que o autor ache que "lei de formação" é o mesmo que "fórmula algébrica", mas não é. As seqüências cujo n-ésimo termo é definido por meio de uma fórmula envolvendo n, em realidade serão as únicas que serão tratadas nos dois capítulos que estamos comentando.

Apesar de ter feito uma introdução cuidadosa das seqüências em geral e das seqüências numéricas em particular, o autor deixou de realizar aqui algo muito importante, que é mostrar uma seqüência numérica como uma *função* cujo domínio é o conjunto dos números naturais (no caso de uma seqüência infinita) ou o conjunto dos números naturais menores que ou iguais a um natural n (no caso de uma seqüência finita com n elementos). Desse modo, os conteúdos desses dois capítulos se apresentam totalmente desconectados das *funções*, assunto cujo estudo começou no primeiro volume.

A ausência de vínculo entre os temas do primeiro volume e esses dois capítulos repete-se quando o texto deixa de apresentar a conexão entre as progressões aritméticas e as funções afins e a ligação entre as progressões geométricas e as funções exponenciais. (Ver A Matemática do Ensino Médio, volume 2, capítulo 1).

Nas seções 1.6 e 2.4, o texto enuncia (mas não justifica) e destaca propriedades das progressões aritméticas e geométricas que são pouco relevantes e nada contribuem para um melhor conhecimento dessas seqüências. Outros aspectos desnecessários que o livro focaliza são a fórmula do produto dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (ainda que essa fórmula esteja provada e analisada corretamente) e a classificação das progressões em "crescentes", "decrescentes", "constantes", "oscilantes".

No Capítulo 1, o texto mostra o procedimento de cálculo da soma dos n primeiros números naturais, mas no caso geral da soma dos termos de uma progressão aritmética finita, a fórmula é simplesmente afirmada. Além disso, não se apresenta a expressão geral dessa soma como função quadrática de n (o número de termos da progressão). Por outro lado, no caso das progressões geométricas finitas, no Capítulo 2, a fórmula da soma dos termos é corretamente demonstrada, o que é muito positivo.

Para motivar o estudo da soma infinita $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots$, o autor lança mão de um dos paradoxos de Zenão — Aquiles e a tartaruga. Considerando a progressão geométrica $(2, 1, 1/2, 1/4, \dots)$, mostra que a soma de seus n primeiros termos tende a 4 quando n tende a infinito. Todavia, nessa interessante abordagem, faltou fazer o retorno ao problema de Aquiles.

Logo após esse exemplo, o texto diz que no caso geral de uma progressão geométrica cujo termo geral a_n tende a zero, então $a_n \cdot q$ (onde q é a razão) também tende a zero e a soma S_n dos n primeiros termos tenderá a $S = a_1/(1 - q)$ (página 36). O texto continua afirmando que a soma dos termos de uma progressão geométrica decrescente, infinita, de razão $-1 < q < 1$ é esse mesmo S. Isso é verdadeiro, mas ocorre aqui uma falha importante, já que o autor não destaca que a condição $-1 < q < 1$ garante que a_n tende a zero quando $n \to \infty$. De fato, para uma progressão geométrica podemos escrever a_n na forma $q_0 q^n$ e temos que $q^n \to 0$ quando $n \to \infty$ se q cumpre a condição acima. Vemos nessa falha uma conseqüência da não-abordagem dessa importante propriedade no trabalho com a função exponencial desenvolvido no volume 1.

O cálculo da geratriz de uma dízima periódica é feito corretamente por meio da fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita. Entretanto, neste exemplo (página 37), bem como nos outros dois que o seguem, o texto não destaca que a fórmula pode ser usada pelo fato de as progressões em foco terem razão positiva menor que 1.

Um outro aspecto relevante que falta ao Capítulo 2 é a apresentação de uma progressão geométrica como uma seqüência na qual a taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é sempre a mesma. Dessa maneira, o autor opta por não relacionar as progressões geométricas à idéia de taxa de crescimento; com essa omissão, o estudante provavelmente deixará de perceber a principal razão para o estudo desse tipo de seqüência.

Capítulo 3. Noções de Matemática Financeira

Este capítulo aborda assuntos como a porcentagem e os juros, que são de grande relevância para o cidadão. Contudo, como usualmente, o autor dá acentuada preferência ao enfoque formalista e à apresentação do conteúdo de maneira muito fragmentada. Assim, insere no texto seções diferentes e introduz fórmulas completamente desnecessárias para resolver problemas que envolvem apenas o conceito de porcentagem: "Fator de aumento e fator de redução, "Acréscimos e descontos sucessivos" e "Operações comerciais".

Os exercícios resolvidos no texto, além de se apresentarem acorrentados às fórmulas, opção que lhes confere uma aparência enganosa de complexidade, são tão imediatos que não se justificam. Ilustremos com um exemplo da página 58:

"Um imóvel foi comprado por R$ 30000,00 e vendido por R$ 45000,00. Qual foi a porcentagem do lucro sobre o preço de compra?"

Como um rapidíssimo cálculo mental mostra, a resposta é imediata: 50%. No entanto, a solução apresentada pelo livro usa a fórmula $L = V - C$, onde L é o lucro, V é o preço de venda e C o de custo, a fim de encontrar o lucro e depois o percentual que este representa.

Ao se referir aos juros compostos, o autor foge um pouco de seu hábito tradicional de não estabelecer vínculos entre os conteúdos e observa corretamente que os valores dos montantes formam uma progressão geométrica de razão $1 + i$; além disso, usa os logaritmos decimais para resolver problemas.

Este capítulo seria uma boa oportunidade para mencionar e destacar a importância do uso das calculadoras. Todavia, a oportunidade não é aproveitada, e a utilização desses instrumentos indispensáveis na sociedade atual não é sequer lembrada.

Capítulo 4. Matrizes

Capítulo 5. Determinantes

Capítulo 6. Sistemas Lineares

O tratamento dos temas que dizem respeito à Álgebra Linear no ensino médio é feito nesses três capítulos, que ocupam 87 páginas do volume.

Os Capítulos 4 e 5 contêm, respectivamente, 30 e 29 páginas nas quais são apresentadas as matrizes e os determinantes de maneira extensa e compartimentada, de acordo com o que se afigura como a concepção didática predominante do autor. Esses dois capítulos carregam consigo simultaneamente a ausência de aspectos importantes e a presença de tópicos e enfoques pouco relevantes, como veremos a seguir.

A opção adotada na ordem de exposição desses três capítulos, quer tenha sido feita simplesmente de acordo com a tradição dos livros-texto brasileiros, quer resulte de uma atitude consciente de seu autor, pode ser interpretada como a visão do conhecimento das matrizes e determinantes como ferramenta indispensável à aprendizagem dos sistemas lineares.

De fato, essa posição parece atestada à página 71, na abertura do Capítulo 4, na seção 4.1 (A utilidade das matrizes), quando o texto diz que com o auxílio de tabelas "os chineses resolviam sistemas de equações lineares, utilizando as matrizes, como são atualmente conhecidas." Também na introdução do Capítulo 5, à página 102, a resolução de alguns tipos de sistemas de equações lineares é citada como uma das importantes aplicações da teoria dos determinantes.

Contudo, neste livro, as matrizes e determinantes são utilizados apenas na resolução de sistemas lineares pela regra de Cramer que, como veremos mais adiante, não é o melhor método de encontrar as soluções de sistemas lineares e, muitas vezes, como acontece neste livro, é empregada de maneira incorreta. Além disso, o Capítulo 6, que focaliza tais sistemas, não apresenta, antes do escalonamento (seção 6.11), sequer um exemplo ou exercício em que o sistema contenha mais de três equações ou incógnitas, o que deixa sem sentido a longa abordagem de matrizes e determinantes quaisquer apresentada nos Capítulos 4 e 5.

Assim, mesmo escolhendo-se esta ordem de apresentação — Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares — poder-se-ia ter adotado uma apresentação das "ferramentas" (matrizes e determinantes) de modo mais resumido e interessante do que o do texto. Façamos alguns comentários.

O capítulo sobre matrizes inicia-se adequadamente por sua apresentação como tabelas de números dispostos em linhas e colunas, apresentação essa ilustrada por três exemplos contextualizados: quantidade de poluentes eliminados por veículos movidos por diferentes tipos de combustíveis, calor latente de fusão de algumas substâncias, quantidade de gordura saturada e colesterol em alguns alimentos. Entretanto, a partir daí, com exceção do exercício P.43 da página 98, nenhuma situação contextualizada aparece no decorrer das mais de 80 páginas que seguem.

Assim, as operações com matrizes são apresentadas na tradicional maneira formalizada e sem motivação, e a multiplicação é arbitrariamente introduzida por meio de um exemplo no que se diz simplesmente: "vamos obter a matriz $C = A \cdot B$

usando o seguinte esquema ...". As propriedades da adição e da transposição de matrizes são listadas sem qualquer justificativa; já as da multiplicação de um número real por uma matriz e da multiplicação de matrizes não são nem mesmo mencionadas.

Na seção 4.13 (Matriz inversa), à página 95, o texto diz que a matriz A é inversível (o correto é invertível) se existir a matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Logo depois há uma observação (sem justificativa) que parece estranha quando relacionada com essa frase, pois diz que "existindo a matriz inversa, ela é única".

Ainda nessa seção, há o cálculo da inversa de uma única matriz 2×2, e os exercícios solicitam que o leitor calcule, caso existam, inversas de outras matrizes 2×2. Não há qualquer observação quanto à dificuldade ou mesmo impossibilidade de se aplicar o método apresentado para matrizes $n \times n$ com $n > 3$.

Ainda no que se refere à noção de inversa de uma matriz, o texto a apresenta corretamente considerando apenas as matrizes quadradas (página 95), mas na página seguinte faz a inútil observação de que "toda matriz inversível é quadrada". Observa também corretamente que nem toda matriz quadrada é invertível, porém não dá qualquer exemplo para ilustrar esse fato.

A inversa de uma matriz quadrada aparece novamente no texto à página 122 no capítulo sobre determinantes (seção 5.10: Cálculo da matriz inversa usando determinante), onde se diz peremptoriamente que se A é uma matriz quadrada e $\det A \neq 0$, então existe a matriz inversa de A e se fornece também a fórmula para o cálculo da inversa utilizando-se a matriz adjunta e o determinante de A. Não fica claro que $\det A \neq 0$ é também condição necessária para a existência da inversa de A, embora esse resultado seja utilizado nos exemplos da página 122. Num deles, verifica-se a impossibilidade de inverter uma matriz dada pelo fato de seu determinante ser nulo; em outro, calcula-se o valor de um elemento x de uma matriz para que a mesma tenha inversa impondo-se a condição de que seu determinante seja não-nulo.

No Capítulo 5 são definidos explicitamente os determinantes para matrizes de ordens 1, 2, 3, sem qualquer motivação ou justificativa. Na página 102, há uma inadequação na linguagem quando se escreve que, dada uma matriz de ordem 1 (ou 2), chamamos determinante de 1ª ordem (de 2ª ordem) dessa matriz a um certo número, pois cada matriz tem apenas um determinante. Da maneira como está no texto, o leitor poderia pensar, por exemplo, que uma matriz de ordem 2 poderia ter determinantes de outras ordens, além do de 2ª ordem definido pelo autor.

Na seção 5.3 são apresentadas 9 propriedades dos determinantes, todas elas ilustradas por exemplos de determinantes de 2ª ou 3ª ordem. Esse procedimento de apenas enunciar uma propriedade e apresentar exemplos ilustrativos carrega consigo o enorme risco de que os estudantes acreditem que exemplos são suficientes para demonstrar alguma coisa. É evidente que existem demonstrações cuja apresentação não é conveniente na escola básica, mas não é preciso chegar-se ao extremo de eliminar a maioria delas. No caso específico das propriedades dos determinantes, há aquelas que decorrem imediatamente de outras, mas neste livro nada é dito a tal respeito. Devemos registrar ainda que a nona "propriedade" da lista não é válida em geral. Por exemplo, o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

é 2 e não -2, como seria se a "propriedade" valesse.

Com exceção do fato de que o determinante de uma matriz é igual ao de sua transposta, todas as propriedades dos determinantes são conseqüências de serem eles funções lineares de cada uma das colunas das matrizes a que se referem. Essa linearidade não é mencionada no texto, ainda que esteja embutida no chamado "Teorema de Jacobi", enunciado, mas não provado à página 118.

Na página 113, no teste T.23, pede-se que o leitor calcule o determinante de uma matriz 4×4, embora não se tenha até aí dito qualquer palavra a respeito de determinantes que não sejam de 1ª, 2ª ou 3ª ordem.

Na página 116, o texto enuncia o teorema de Laplace (desenvolvimento do determinante por cofatores) para matrizes quadradas de ordem n. Como não foi dada qualquer definição de determinante de ordem n para $n > 3$, não se pode atribuir um significado a esse resultado.

O Capítulo 5 apresenta ainda a matriz de Vandermonde e a regra para calcular seu determinante, o que nos parece completamente inútil e talvez esteja aqui apenas como mais uma componente do adestramento para questões obsoletas de vestibulares.

Quanto ao Capítulo 6, infelizmente, há muitos aspectos negativos. Nele, os sistemas lineares surgem de forma totalmente descontextualizada; não existe um único problema relativo a ligas, custos de produtos manufaturados, dietas, reações químicas, etc. As incógnitas são denominadas variáveis, o que é impróprio, e na página 131 a Observação 2 diz que toda equação do tipo $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$ não admite solução sem mencionar que $b \neq 0$ e sem a menor explicação.

Os sistemas lineares 2×2 e 3×3, que são os mais freqüentes em todo o capítulo, não são interpretados geometricamente.

Na página 136, embora tenha sido dito anteriormente que um sistema é indeterminado quando tem infinitas soluções, o exemplo 2 afirma que um sistema particular é indeterminado justificando esse fato com a apresentação de três de suas soluções. Na realidade, sistemas lineares que têm mais de uma solução têm obrigatoriamente infinitas soluções, mas nada se diz sobre isso.

Na seção 6.8 a regra de Cramer é "postulada" para sistemas lineares 2×2 e não só se apresenta um exemplo de uso da regra para um sistema desse tipo como também se propõe ao leitor que a utilize em outros, o que é completamente fora de propósito.

Na seção 6.9 (Discussão de sistemas lineares de n equações a n variáveis), há um gravíssimo engano decorrente da aplicação incorreta da regra de Cramer: o texto afirma que se todos os determinantes que a regra associa ao sistema são nulos, este é indeterminado, o que não é verdade. Examine-se, por exemplo, o sistema impossível

$$\begin{aligned} X + Y + Z &= 0 \\ X + Y + Z &= 1 \\ X + Y + Z &= 2 \end{aligned}$$

que tem nulos todos os determinantes relativos à dita regra.

Na página 141, o exemplo 1c) contém a equação $0x + 0y = 1$, que obviamente não tem solução, mas é usada uma conseqüência da regra de Cramer para mostrar que o sistema é impossível!

É importante registrar que, mesmo quando é possível aplicar a regra, ela não é o melhor método de resolução de sistemas lineares devido ao seu alto custo operacional (ver uma explicação, por exemplo, no número 23 da Revista do Professor de Matemática). O Capítulo 6 contém o método mais adequado para a abordagem dos sistemas lineares, que é o escalonamento, mas não chama a atenção para suas vantagens. Além disso, há alguns problemas na apresentação do escalonamento: a definição de sistema escalonado (página 146) está incorreta, as transformações que podem ser feitas num sistema de modo a produzir um sistema equivalente a ele não são justificadas, e o texto chama variáveis livres de um sistema indeterminado àquelas que não aparecem no início de nenhuma das equações do sistema escalonado, buscando uma padronização para a resolução desse tipo de sistema, quando isso não é necessário.

Procuramos aqui apontar diversas falhas deste livro quanto ao tratamento dos tópicos da Álgebra Linear no ensino médio; em grande parte, tais falhas decorrem de uma preocupação que parece arraigada nos livros didáticos no sentido de apresentar primeiro, de qualquer maneira, os conteúdos relativos às matrizes e aos determinantes para somente depois focalizar os sistemas lineares. Além disso, estão presentes nesses três capítulos outras características da coleção tais como a pouca contextualização, a mera afirmação de resultados sem qualquer justificativa e o empenho em enquadrar todos os conteúdos em regras, sem maiores explicações.

Como sugestão de um enfoque completamente diferente dos assuntos aqui comentados pode-se ler com proveito, por exemplo, o volume 3 da coleção A Matemática do Ensino Médio.

Capítulo 7. Análise Combinatória

O capítulo se inicia por uma contextualização histórica da análise combinatória e por uma breve descrição de seu objeto de estudo, o que é positivo. Porém, logo na página introdutória há dois erros (gráficos?). O primeiro deles se refere ao século em que viveram Fermat e Pascal — XVII e não XVIII. O segundo é o seguinte: no quadro que pretende mostrar os agrupamentos possíveis de dois elementos entre os quatro garotos Eduardo, Gustavo, Renato e Fabiano, falta a dupla formada por Gustavo e Fabiano, o que faz com que o número de opções para se formarem tais agrupamentos seja 6 e não 5 como está no texto.

Após a introdução vem a seção "Problemas de contagem", que começa apropriadamente por um problema e sua árvore de possibilidades. Em seguida, o princípio fundamental da contagem é apresentado corretamente e são propostos 11 problemas que deverão ser resolvidos pela utilização desse princípio, já que não há mais nada disponível até o momento em que aparecem. Infelizmente, contudo, logo depois a ênfase passa a ser colocada no uso das fórmulas pois, após introduzir o fatorial de um número natural e propor uma série de exercícios de manipulação que o envolvem (seção 7.3), o capítulo passa a se fragmentar em seções dedicadas aos arranjos simples, às permutações simples, às combinações simples e aos agrupamentos com repetição (que excluem as combinações com elementos repetidos, sem nenhuma explicação, o que possivelmente deixará o leitor curioso).

Nessas seções, o autor privilegia o estabelecimento de fórmulas, as quais vêm sempre destacadas dentro de retângulos cor-de-rosa, e a partir de seu aparecimento passam a ser os instrumentos favoritos para a resolução dos problemas, ficando completamente esquecido o princípio fundamental da contagem. O livro apresenta alguns exercícios descontextualizados (e desinteressantes) que só podem ser resolvidos por meio das fórmulas, mas felizmente o número desses exercícios é pequeno comparado ao total dos que são propostos no capítulo.

A escolha adotada pelo texto de abordagem seccionada dos arranjos, das permutações e das combinações simples, seguida pela dos arranjos e permutações com repetição tem o inconveniente potencial de levar o estudante a examinar os problemas que lhe são propostos tentando ver em qual dessas categorias se enquadram.

O livro apresenta em primeiro lugar os arranjos simples e a fórmula para calcular o número de arranjos de n elementos tomados p a p, e depois introduz as permutações como casos particulares. Nesse enfoque, portanto, os arranjos têm um status mais importante que o das permutações, o que não é adequado, tendo em vista que as duas ferramentas básicas da contagem são a permutação (que corresponde à noção intuitiva de misturar) e a combinação (que está associada à noção intuitiva de escolher). Em conseqüência, na página 168, a fórmula para o cálculo do número de permutações de n elementos distintos (P_n) é encontrada a partir da fórmula para o número de arranjos de n elementos tomados n a n, por aí se chegando a $P_n = n!$. Observamos aqui mais uma vez a preferência do texto pela abordagem formalista, já que é muito mais natural (e conveniente) chegar-se a essa mesma fórmula por meio do princípio fundamental da contagem que, lembremos, é o tópico inicial do capítulo.

O tratamento dado às combinações simples impede que sejam vistas como subconjuntos de um conjunto finito, pois sua definição é obscura: "Combinações são agrupamentos que não diferem entre si ao mudar a ordem de seus elementos." (página 171). Além disso, a fórmula que dá o número de combinações de p elementos distintos que podem ser formadas com os n elementos de um conjunto é obtida por intermédio da fórmula para o cálculo do número de arranjos correspondentes, sem que se evidencie a contagem empreendida. (Ver A Matemática do Ensino Médio, volume 2, seção 4.2, para um enfoque diferente).

Na seção 7.7 (Agrupamentos com repetição), o texto começa destacando os arranjos com repetição, investindo de imediato no estabelecimento de uma fórmula para a sua contagem, o que é certamente dispensável, uma vez que o cálculo do número de agrupamentos desse tipo pode ser feito rapidamente pelo princípio fundamental da contagem, sem qualquer preocupação com mais uma fórmula. Em seguida aparecem as permutações com repetição que são de fato agrupamentos importantes, porém a introdução da fórmula para o cálculo do número de permutações com elementos repetidos é feita de maneira confusa: "De modo geral, se um conjunto tem n elementos, dentre os quais k_1 elementos são iguais a n_1, k_2 elementos são iguais a n_2, k_3 elementos são iguais a $n_3, \ldots, k_p$ elementos são iguais a n_p, então temos ..." É mais simples e mais fácil dizer "se uma seqüência de n elementos tem p elementos distintos, onde o primeiro se repete n_1 vezes, o segundo se repete n_2 vezes, ... e o p-ésimo se repete n_p vezes, com $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$, então ..."

Lamentavelmente, apesar do grande número de problemas variados que são propostos ao aluno neste capítulo, as características da apresentação do texto configuram uma atitude que empobrece o grande potencial que tem a análise combinatória no sentido de desenvolver o pensamento, a criatividade e a imaginação do estudante. A fragmentação dos problemas em casos e a inexistência de comentários a respeito de estratégias de contagem podem levar, ao contrário, à insegurança e ao sentimento de incapacidade diante de um tema tão rico e relevante.

Capítulo 8. Binômio de Newton

Este capítulo contém 18 páginas que abordam os números binomiais, o triângulo de Pascal e o binômio de Newton, sendo um grande espaço ocupado por listas de exercícios.

Embora o número de combinações de n elementos tomados p a p ($C_{n,p}$) passe a ser chamado explicitamente de número binomial de ordem n e classe p e a ser denotado por $\binom{n}{p}$, o texto não estabelece qualquer ligação com o capítulo de Análise Combinatória que o precede.

As propriedades dos números binomiais (dois números binomiais complementares são iguais e a relação de Stifel) são demonstradas a partir de sua definição; no entanto, as propriedades do triângulo de Pascal são simplesmente enunciadas e exemplificadas, sem qualquer preocupação com a prova. O mesmo acontece com a fórmula do binômio de Newton, que é apresentada sem conexão com o estudo das combinações que foi feito no capítulo anterior, o que seria, talvez a única motivação para que esse tópico aparecesse no livro, além de sua presença nos concursos vestibulares.

Capítulo 9. Probabilidade

Este capítulo apresenta um tratamento cuidadoso do assunto; contém uma pequena introdução histórica, diferencia experimentos determinísticos e aleatórios e define corretamente os conceitos de espaço amostral (faltou apenas dizer que este será finito em todo o estudo), evento, eventos complementares, eventos mutuamente exclusivos, etc.

O texto trabalha com espaços amostrais equiprováveis, definindo e calculando apropriadamente as probabilidades.

Embora os problemas sejam interessantes e abordem temas bem variados, seria desejável que em pelo menos alguns deles fosse evidenciada a utilidade das probabilidades para a avaliação de uma tomada de decisão em situações reais.

Capítulo 10. Geometria Espacial de Posição

O capítulo se inicia com uma introdução contendo informações sobre Euclides, os Elementos, as geometrias não-euclidianas e a geometria dos fractais, além de duas pequenas notas biográficas acompanhadas de fotografias de Lobachevsky e Riemann.

O texto introduz corretamente os conceitos primitivos e explica o que são postulados e teoremas, apresentando logo em seguida alguns postulados denominados "Postulado Fundamental" ("Existe no espaço infinitos pontos, retas e planos."), "Postulados da Reta" e "Postulados do Plano". Falta, no entanto, enunciar um postulado básico que é o que diz que dois planos distintos com um ponto em comum têm também uma reta em comum.

Na seção 10.6, o livro relaciona quatro diferentes modos de se determinar um plano. O primeiro deles é o postulado que afirma que um plano é determinado por três pontos não-colineares. Como mostra o texto, os três outros modos são conseqüências desse postulado; porém, não há destaque para o fato de essas três propriedades serem exemplos de teoremas, apesar de o autor ter enfatizado que teoremas são proposições que devem ser demonstradas para serem aceitas.

O autor adere à convenção inadequada de considerar retas coincidentes como paralelas e planos coincidentes como paralelos, chegando a usar a inconveniente expressão "planos paralelos coincidentes". Essa opção produz complicações, contradições e enganos. Um exemplo: na interpretação geométrica de um sistema linear de 2 equações e 3 incógnitas como a representação de dois planos no espaço, se os planos são paralelos, o sistema não tem solução; se os planos são coincidentes, o sistema tem infinitas soluções.

Em relação à linguagem, registram-se alguns problemas: a expressão "retas ortogonais" é empregada apenas para retas reversas, quando mais geralmente essa mesma expressão é usada para designar também retas que se intersectam. Usam-se ainda as expressões "distância entre um ponto e uma reta", "distância entre um ponto e um plano" e "distância entre uma reta e um plano paralelo a ela", que poderiam ser substituídas com proveito por, respectivamente, "distância de um ponto a uma reta", "distância de um ponto a um plano" e "distância de uma reta a um plano". Neste último caso, é desnecessário dizer que o plano é paralelo à reta, pois não há interesse em se considerar a distância de uma reta a um plano que não lhe seja paralelo.

Apesar de apresentar as demonstrações de alguns teoremas, o texto omite as de outros sem a menor explicação, contentando-se o autor em enunciar o resultado e apresentar uma ilustração. Entre esses teoremas encontra-se o importante resultado que fornece a condição suficiente para que uma reta seja perpendicular a um plano (página 244). Não são justificadas coisas simples como a maneira de se determinar a distância entre dois planos paralelos e a distância de uma reta a um plano, o que pode levar o leitor a pensar que tais maneiras são arbitrárias.

Na seção 10.10, o texto define corretamente a projeção ortogonal de um ponto sobre um plano, mas não enuncia a existência e a unicidade da perpendicular a um plano por um ponto dado.

Embora o capítulo contenha a definição de ângulo entre reta e plano (melhor seria dizer ângulo de uma reta com um plano), não apresenta a definição de ângulo de dois planos.

Capítulo 11. Geometria Espacial Métrica

O capítulo inicia-se mais uma vez por uma brevíssima nota histórica na qual o leitor é informado de que os três últimos livros dos Elementos de Euclides tratam da geometria dos sólidos. O texto diz que a geometria métrica encontra-se atualmente "presente em embalagens, aparelhos eletrônicos, máquinas, casas, edifícios, etc." e "inclui desde um simples projeto até os mais audaciosos, como a estação espacial russa Mir"; apesar dessa aparente sofisticação, no entanto, o autor não se preocupa em dizer o mais simples e importante que é que chamamos de geometria métrica ao estudo das medidas em geometria: comprimentos, áreas e volumes.

A seção seguinte do capítulo é dedicada aos poliedros. A definição de poliedro é um assunto delicado, e uma definição que caracterize perfeitamente um poliedro talvez nem deva constar de um texto de Geometria para o Ensino Médio. Mas a definição dada pelo autor na página 258 do livro não está correta. Diz ele: "Poliedros são sólidos geométricos limitados por polígonos de tal modo que esses polígonos tenham, dois a dois, um lado comum". Ora, um cubo é um poliedro, porém duas de suas faces que sejam opostas não têm nenhum lado comum. A figura apresentada no texto, na mesma página 258, como sendo um poliedro não-convexo na verdade não é um poliedro, pois a interseção das duas faces da frente não é um lado de uma dessas faces (é apenas uma parte de um lado). O autor poderia dizer, com mais acerto, que um poliedro é um sólido limitado por um número finito de polígonos de tal maneira que para cada lado de qualquer desses polígonos existem dois e somente dois polígonos do sistema tendo este lado em comum. Não seria uma definição completa, mas daria uma idéia melhor do conceito definido.

Embora o texto enuncie a relação de Euler apenas para os poliedros convexos, o que é correto, a relação "cai do céu" sem a menor preocupação com uma justificativa; da mesma forma, o texto afirma sem a menor explicação que existem somente cinco tipos de poliedros regulares. Esse tipo de procedimento é lamentável, principalmente quando é possível, como nesses dois casos, apresentar uma demonstração compreensível aos alunos do ensino médio.

As definições apresentadas para o prisma e para a pirâmide são confusas e incorretas, porque esses sólidos não são, como escreve o autor, "limitados" pelos conjuntos de segmentos mencionados e sim as reuniões de tais segmentos.

O texto não se preocupa em dar uma noção do que é volume de um sólido e "postula" a fórmula do volume do paralelepípedo retângulo sem maiores explicações, nem mesmo para o caso em que as medidas das arestas são números inteiros.

O princípio de Cavalieri é uma boa opção para a apresentação do cálculo dos volumes mais comuns, como o texto procura fazer na maioria dos casos; no entanto, seu enunciado é pouco claro, utiliza o verbo "interceptar" quando o correto seria "intersectar" e se refere a "sólidos bom bases num mesmo plano", o que é desnecessário e carece de sentido pois sólidos em geral não têm bases. Na página 271, para calcular o volume de um prisma, o texto se utiliza do fato de que as seções de um prisma por planos paralelos às suas bases são todas congruentes, mas não o demonstra. Essa afirmação sem explicação e mais o enunciado confuso do princípio de Cavalieri prejudicam a compreensão do cálculo do volume do prisma.

Em relação às pirâmides ocorre algo semelhante, já que o texto não se detém na análise do que acontece quando uma pirâmide é seccionada por um plano paralelo à sua base, ainda que ao abordar o tronco de pirâmide regular de bases paralelas (seção 11.8), o autor diga: "Note que a pirâmide menor é semelhante à pirâmide maior ..." Um dos maiores problemas deste capítulo está em sua desconexão com o capítulo anterior, no qual foram focalizadas as posições relativas de retas e planos no espaço, e se deu alguma atenção ao paralelismo e ao perpendicularismo de retas e planos. Um exemplo é a ausência de qualquer consideração a respeito do teorema de Tales para planos paralelos, o que acarreta a displicência com que é tratada a semelhança. Isso se reflete especialmente no cálculo do volume da pirâmide triangular a partir da decomposição de um prisma triangular por uma figura, sem mais preocupações. Tal procedimento pode levar o estudante a crer que os resultados se estabelecem dessa forma em Matemática, isto é, sem necessidade de maior rigor.

Apesar do descuido quanto à noção de semelhança, ela aparece na seção que aborda o tronco de pirâmide regular de bases paralelas, como já dissemos. O autor se preocupa em fazer todos os cálculos para encontrar a complicada fórmula do volume desse sólido, e aplica-a num exemplo, sem dizer ao leitor que é muito mais simples e produtivo calcular esse volume como diferença dos volumes das pirâmides maior e menor.

Embora os cilindros sejam a generalização dos prismas e os cones a das pirâmides, nada se diz sobre isso, e o texto focaliza apenas os cilindros e cones circulares, sendo que a definição do cilindro circular é confusa.

Quanto ao cálculo dos volumes desses dois sólidos, o do cilindro se ressente dos mesmos problemas que apontamos para o volume do prisma; já para o volume do cone, afirma-se simplesmente a fórmula, sem menção ao princípio de Cavalieri. O mesmo tipo de comentário feito aqui a respeito da fórmula do volume do tronco de pirâmide se aplica ao cálculo do volume do tronco de cone.

A esfera é definida corretamente, e seu volume é calculado com a utilização do princípio de Cavalieri; faltou apenas motivar o aparecimento do sólido cujo volume é igual ao da esfera e é calculável e partir dos conhecimentos sobre os volumes do cilindro e do cone. A fórmula da área da superfície esférica "cai do céu"; embora não se possa demonstrá-la no ensino médio, é possível apresentar argumentos que a tornem aceitável, como o que é usado no volume 2 de "A Matemática do Ensino Médio". O volume da cunha esférica e a área do fuso esférico são calculados por meio de regras de três sem justificativas, o que atesta mais uma vez a desatenção do autor em relação a uma das noções mais importantes da Matemática do ensino básico, a de proporcionalidade.

Dentre os numerosos exercícios do capítulo, há alguns problemas contextualizados interessantes, como por exemplo os problemas P.17, T.14, P.42, T.38 e T.67. Também merecem elogios as figuras muito bem feitas.

Considerações finais sobre o volume

Como o primeiro volume da coleção, este tem as qualidades de boa apresentação gráfica, ilustrações cuidadas e uma tentativa de contextualizar histórica e socialmente os conteúdos matemáticos. Da mesma maneira, evidenciam-se aqui características do volume anterior que consideramos inconvenientes, tais como a preferência pelo formalismo, a fragmentação dos assuntos, a ênfase no uso das fórmulas e o exagero quanto ao número de exercícios em sua maior parte repetitivos, que dificulta a apreensão do que é realmente relevante.

Um outro problema que deve ser mais uma vez apontado é a ausência de preocupação em mostrar conexões entre os temas, estejam presentes no mesmo volume ou no volume anterior.

Este segundo livro da coleção apresenta ainda inadequações quanto à conceituação e à linguagem, para as quais procuramos chamar a atenção na análise dos diferentes capítulos. Julgamos merecer atenção particular a parte dedicada aos assuntos da Álgebra Linear, que nos parece muito deficiente. Da mesma forma, os dois capítulos que abordam a Geometria ressentem-se da falta de um tratamento mais cuidadoso.

Paulo Bucchi

Curso Prático de Matemática – volume 3

Introdução

Este é o último de uma série de três volumes propostos para o ensino da Matemática no nível médio. Da mesma forma que para os livros anteriores, para este terceiro existe um "Livro do Professor" cujo conteúdo é constituído exclusivamente pelas soluções de problemas selecionados entre os numerosos exercícios propostos ao estudante.

O volume é composto por 353 páginas distribuídas nos capítulos:

1. Introdução à Geometria Analítica
2. A reta
3. A circunferência
4. As cônicas
5. Número complexos
6. Polinômios
7. Equações algébricas
8. Noções de Estatística
9. Limites
10. Derivadas
11. Questões complementares

O último capítulo é apenas uma lista de exercícios para cuja resolução é necessário combinar conhecimentos apresentados neste volume e nos anteriores.

Como nos Volumes 1 e 2, em alguns capítulos o autor inclui uma introdução histórica que muitas vezes ć acompanhada por breves notas biográficas sobre matemáticos relacionados ao tema abordado.

O Volume 3 tem também boa apresentação gráfica e revisão bem feita quanto à Língua Portuguesa.

Analisaremos e comentaremos os capítulos do livro, separadamente ou em grupos de tópicos relacionados entre si.

Capítulo 1. Introdução à Geometria Analítica

O capítulo começa com uma introdução que procura contextualizar historicamente a Geometria Analítica a partir do trabalho de Fermat e Descartes. O autor se preocupa também em mostrar que a Geometria Analítica tem muitas aplicações; cita, de maneira um tanto vaga, uma entre elas, a "otimização de processos".

Em seguida, é introduzido o "sistema cartesiano ortogonal" como o sistema constituído por dois eixos perpendiculares entre si: vale lembrar que no volume anterior a expressão "retas ortogonais" foi reservada para retas reversas, de modo que ao comparar o que o autor escreve nos dois volumes encontramos uma certa incoerência.

Não há a menor preocupação em mencionar coordenadas na reta, talvez porque se considere que isso já foi feito no primeiro volume da coleção (de modo precário, segundo nossa análise do Capítulo 2 do Volume 1).

Na seção 1.3 são dadas, peremptoriamente, algumas "propriedades do sistema cartesiano"; por exemplo, na página 3 escreve-se simplesmente: "Se um ponto P pertence à bissetriz do primeiro e do terceiro quadrantes, então $x_P = y_P$, ou seja, $P(x_P, x_P)$."

Na seção 1.4, aparece a fórmula para o cálculo da distância entre dois pontos no plano, conhecidas suas coordenadas. Para pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(X_B, y_A)$, está escrito à página 8 que $d_{BC} = y_B - y_A$ e $d_{AC} = x_B - x_A$. Apesar da ausência de explicações quanto à notação devemos concluir que d_{MN}, por exemplo, representaria a distância entre os pontos M e N. Na verdade, as igualdades acima são válidas apenas para $y_B \geq y_A$ e $x_B \geq x_A$; o correto seria escrever $d_{BC} = |y_B - y_A|$ e $d_{AC} = |x_B - x_A|$, que valem em todos os casos.

Na seção 1.5 (razão de seção de um segmento), define-se a "razão de seção do segmento AB pelo ponto P" como o número real $r = AP/PB$, e não se explica o que são AP e PB. Entretanto, o texto leva a entender que se trata, respectivamente, dos comprimentos de AP e PB, pois o número AP/PB é considerado a razão de semelhança de dois triângulos retângulos. Porém, imediatamente depois, é dito que a razão r "pode ser positiva, negativa ou nula, ou até não existir" (página 11), e então torna-se impossível ao leitor compreender a definição dessa razão. Parece que o autor quer se referir à noção clássica de *razão simples* de três pontos alinhados, A, B P, definida por $(ABP) = \overline{AP}/\overline{BP}$, onde $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$ são segmentos orientados. Assim, a razão é negativa para P no interior do segmento AB e positiva para P exterior ao mesmo segmento. Essa convenção ficou invertida da maneira como a razão foi definida pelo autor.

Os muitos exercícios que aparecem no capítulo são do tipo manipulativo; nenhum deles explora o estabelecimento de diferentes sistemas de coordenadas no plano, mostrando ao estudante que isso é possível e interessante.

Capítulo 2. A reta

Neste capítulo, o autor decididamente exagera ao escrever 74 páginas, subdivididas em 16 seções que mostram uma hiper-fragmentação dos tópicos e uma quantidade excessiva de exercícios.

A seção 2.1 trata de forma desnecessariamente complicada a condição para o alinhamento de três pontos: o autor escolhe decidir se três pontos estão ou não alinhados a partir do exame do anulamento ou não de um determinante, e depois se dedica a propor exemplos e exercícios nos quais deve ser usado esse método. Essa opção, que a nosso ver prestigia a memorização, não coloca em relevo o caráter geométrico da situação, que é evidenciado quando se verifica o alinhamento de três pontos A, B, C pela análise das inclinações dos segmentos AB e BC.

É novamente usando um determinante que o texto apresenta a equação geral de uma reta; ao longo do capítulo, o determinante será utilizado muitas vezes nos exercícios resolvidos.

Na seção 2.3, o autor define corretamente o coeficiente angular de uma reta r como a tangente do ângulo formado pelo eixo Ox e por r. Contudo, no texto é empregada a expressão "inclinação da reta" para a medida desse ângulo, o que não é usual. Em geral, os termos "coeficiente angular" e "inclinação" são sinônimos e designam a tangente do referido ângulo da reta e do semi-eixo positivo das abscissas.

Na seção 2.5, o autor introduz uma terminologia que desconhecíamos completamente: "equação fundamental de uma reta" para se referir à forma $y - y_0 = m(x - x_0)$ da equação da reta que passa pelo ponto de coordenadas (x_0, y_0) e tem coeficiente angular m. No entanto, ele não se preocupa em mostrar a relação entre essa equação e a equação geral $ax + by + c = 0$, que apareceu anteriormente. Cabe registrar que o texto focaliza corretamente o feixe de retas que passam por um ponto dado, sem esquecer-se da reta vertical.

Na abordagem da "equação de uma reta na forma reduzida" (mais uma seção!), novamente não se faz qualquer relação entre essa forma e a equação geral.

Na seção 2.7, o autor aproveita de novo a oportunidade de usar um determinante para obter outra equação de reta, a segmentária.

Existe ainda uma seção para as equações paramétricas de uma reta, mas o enfoque adotado envolve somente manipulações e nenhuma preocupação com o significado do parâmetro nem em mostrar que não existe apenas uma possibilidade de parametrização para uma reta.

Na seção 2.9, surge uma grave inadequação — a de considerar retas coincidentes como paralelas — juntamente com as inconvenientes expressões "retas paralelas distintas" e "retas paralelas coincidentes". A condição para que duas retas sejam paralelas é focalizada apenas no caso das equações reduzidas, e sem explicação.

Outros dois pontos que devem ser registrados encontram-se nas páginas 55 e 66: na primeira, há uma complicação inútil para mostrar que as retas $2x+2y+4=0$ e $4x+4y+8=0$ são coincidentes; na última, pede-se num exemplo que se encontre a equação de uma reta simétrica em relação a outra sem definir o que isso significa.

Na seção 2.11, ao demonstrar a fórmula para o cálculo da distância de um ponto a uma reta, o texto não faz referência ao fato de que a reta considerada é não-vertical (b precisa ser não-nulo na equação $ax+by+c=0$); também nada se diz a respeito do cálculo (imediato) da distância quando a reta é vertical. Na página 69, extrai-se a raiz quadrada de b^2 como b, o que é falso se $b<0$.

Depois de todo o trabalho para deduzir a fórmula da distância de um ponto a uma reta, o autor não lhe faz menção ao calcular a área de um triângulo dadas as coordenadas de seus vértices, preferindo mais uma vez o uso de um determinante.

Na seção 2.14, há outra inadequação quanto à linguagem: em vez de "bissetrizes de r e s", o correto é "bissetrizes dos ângulos de r e s".

A seção 2.15 é um estudo bem feito e bem ilustrado acerca da interpretação gráfica de desigualdades do 1º grau.

Entre seus 108 problemas e 118 questões de múltipla escolha, o capítulo inclui exercícios interessantes, apesar de nenhum deles ser contextualizado fora do campo da própria Matemática.

Infelizmente, as opções do autor para abordar um assunto simples e básico como o estudo analítico da reta têm como efeito torná-lo mais complicado e difícil para o aluno.

Capítulo 3. A circunferência

O texto introduz expressões pouco usuais para a equação da circunferência: chama a forma $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ de "equação reduzida" e a forma desenvolvida $x^2+y^2-2ax-2by+z^2+b^2-R^2=0$ de "equação geral". O utilíssimo método de completar quadrados para identificar o centro e o raio de uma circunferência (chamado de "formar o trinômio quadrado perfeito") é usado como segunda alternativa na resolução do exemplo 5 da página 99, mas o autor não lhe confere o destaque merecido, dando acentuada preferência, ao longo dos exemplos do capítulo, a igualar os coeficientes de uma equação dita de uma circunferência particular com os coeficientes da equação de uma circunferência genérica.

Na seção 3.4, de forma um tanto confusa, pretende-se provar (resultado verdadeiro) que uma condição necessária para que a equação Ax^2+By^2+Cxy+

$Dx + Ey + F = 0$ represente uma circunferência é $A = B \neq 0$, $C = 0$ e $D^2 + E^2 - 4Af > 0$.

Na "demonstração", além de usar parte da tese (a condição $A \neq 0$), o autor iguala os coeficientes correspondentes das equações

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

e

$$x^2 + (B/A)y^2 + (C/A)xy + (D/A)x + (E/A)y + (F/A) = 0,$$

admitindo tacitamente que duas equações que definem a mesma curva têm coeficientes proporcionais, o que é falso, como se explica no número 29 da Revista do Professor de Matemática. Na verdade, não é difícil mostrar corretamente as condições $A = B \neq 0$ e $C = 0$, e depois, usando o completamento de quadrados, chegar à condição $D^2 + E^2 - 4AF > 0$. O mesmo método de completar quadrados poderia ter sido utilizado vantajosamente na verificação de que a equação $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 16 = 0$ (exemplo d) da página 104) não representa uma circunferência por ser equivalente a uma soma negativa de quadrados ($(x-2)^2 + (y-3)^2 = -3$).

Na seção 3.6, a posição de uma reta em relação a uma circunferência é estudada do ponto de vista geométrico, por meio da comparação entre o raio e a distância do centro à reta. Seria interessante que a situação fosse abordada também do ponto de vista algébrico, examinando-se, pelo menos em alguns exemplos, as possibilidades para a solução do sistema formado pelas equações da reta e da circunferência. No exemplo 2 da mesma seção, à página 107, a solução apresentada utiliza o determinante tão apreciado pelo autor para achar a equação de uma reta da qual se conhecem as coordenadas de dois pontos, quando bastaria encontrar sua inclinação para resolver o problema proposto.

De modo análogo ao que é feito na seção 3.6, na análise das posições relativas de duas circunferências (seção 3.7), utiliza-se somente a abordagem geométrica de examinar o valor da distância entre os centros em relação aos raios, sem focalizar a situação do ponto de vista do sistema formado pelas equações das duas circunferências.

O capítulo contém ainda um estudo gráfico de algumas inequações do segundo grau em duas variáveis, com boas ilustrações e alguns exercícios propostos. Contudo, o autor trata o exterior e o interior de uma circunferência a partir de exemplos, sem dar a explicação muito simples de que a análise da posição de um ponto do plano em relação à circunferência é realizada pela comparação do raio da circunferência com a distância do ponto ao centro.

Capítulo 4. As cônicas

Na introdução histórica que abre o capítulo, o autor faz referência à origem grega do estudo das cônicas pelos pitagóricos e posteriormente por Apolônio de Perga. O texto, de forma muito pertinente, também menciona o trabalho de Johannes Kepler a respeito das órbitas dos planetas, e apresenta uma brevíssima nota sobre o grande astrônomo alemão. Nessa nota, entretanto, a sentença “No campo da matemática, uma das contribuições de Kepler foi um trabalho sobre poliedros” nos parece mal colocada, pois dá a idéia de que a obra astronômica de Kepler nada tem que ver com a Matemática, o que é errôneo. Além disso, o trabalho de Kepler sobre poliedros também está ligado à Astronomia — ele propôs uma cosmologia baseada nos cinco poliedros de Platão.

Ainda na introdução, aparece a única referência do capítulo às aplicações das cônicas, os faróis parabólicos dos automóveis. Porém nada mais é dito ou explicado a esse respeito.

O capítulo dedica uma seção à elipse, uma à hipérbole e uma à parábola, que são apresentadas como seções do cone por um plano. Embora mostre corretamente por meio de figuras as posições do plano de modo a se obter cada uma das cônicas, o texto não descreve ao leitor tais posições.

Na seção destinada ao estudo da elipse, o autor oportunamente mostra como traçar essa curva com o uso de cartolina, barbante, lápis e alfinete, mas nessa explicação acompanhada de um desenho ele já diz que a curva assim obtida é uma elipse, antes de definir elipse. Logo após aparece essa definição, que se apresenta confusa. Na página 121, alguns elementos da elipse são nomeados numa figura e não definidos; são eles os vértices, o eixo maior e o eixo menor. O texto contém a afirmação correta de que quanto menor for a excentricidade de uma elipse, mais próxima ela será de uma circunferência, ainda que não a justifique.

Não há qualquer esclarecimento quanto à escolha do sistema de coordenadas em relação ao qual a equação da elipse se apresenta em uma das formas $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ou $x^2/b^2 + y^2/a^2 = 1$. Como em toda a coleção nenhuma referência é feita à utilíssima noção de translação de coordenadas, a equação de uma elipse com centro num ponto (x_0, y_0) qualquer e eixos paralelos aos eixos coordenadas parece “cair do céu”.

Considerações análogas às que acabamos de tecer podem ser feitas em relação às seções do capítulo que focalizam a hipérbole e a parábola.

Na seção que estuda a hipérbole, o autor diz que retas são as assíntotas da hipérbole de equação $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ e até encontra suas equações (é mais uma chance de encontrar equações de retas usando determinantes!), porém não diz o que é assíntota de uma curva. Portanto não poderia explicar porque as retas citadas são assíntotas da hipérbole em questão. A figura da página 133 também nada esclarece. É certo que o tema é delicado e talvez difícil de ser tratado no ensino médio, mas neste caso pensamos que o melhor seria não citá-lo tão descuidadamente.

Nenhuma palavra é dita sobre a importante hipérbole $xy = k$, onde k é constante.

A oportunidade de estabelecer uma conexão entre o estudo das equações das cônicas e o estudo das funções ao qual se dedicou tanto espaço no primeiro volume da coleção é inteiramente desperdiçada.

O estudo das cônicas, ainda que não possa ser tratado de modo completo no nível médio, é relevante devido às muitas aplicações dessas curvas (não citadas no livro). Sob esse aspecto, a abordagem aqui adotada deixa algo a desejar.

Capítulo 5. Números complexos

O capítulo começa com uma introdução histórica adequada, na qual são citados os importantes matemáticos italianos do Renascimento, Cardano e Bombelli. Esse texto inicial também procura chamar a atenção para a importância das aplicações dos números complexos à Matemática e à Física. Em seguida, o capítulo se fragmenta em 13 seções nas quais são abordados os conteúdos, além de um resumo e de uma lista final de exercícios.

Depois de introduzir a unidade imaginária, o autor usa uma linguagem inadequada ao dizer que "todo número complexo pode ser colocado na forma $a + bi$, denominada forma algébrica, em que a e b são números reais e i é a unidade imaginária" (página 151), já que na verdade essa é a maneira de definir os complexos. O melhor seria dizer que um número complexo é um número da forma $a + bi$, onde a e b são números reais e i é a unidade imaginária, e essa forma de exprimir os complexos é chamada forma algébrica.

As propriedades do conjugado e do módulo dos complexos são enumeradas sem a menor preocupação com suas justificativas, que não são propostas nem como exercícios aos estudantes. O inverso de um complexo $z \neq 0$ merece pouco destaque, e nada se diz sobre os complexos de módulo 1. Outra falha é a ausência da relação $z\overline{z} = |z|^2$ e, portanto, de sua conseqüência $z^{-1} = \overline{z}$ para $|z| = 1$; tais relações não são mencionadas nem sequer nos exercícios.

Um problema grave do tratamento conferido pelo autor aos complexos é a fragilidade do enfoque geométrico, apesar da preocupação em até dar um nome especial ("afixo") à representação de cada complexo no plano de Argand–Gauss. Assim, a apresentação adotada deixa de interpretar geometricamente o conjugado de um número; os vetores são completamente omitidos; as operações não são interpretadas geometricamente; não se diz explicitamente que o módulo de um complexo representa a distância do ponto que lhe corresponde à origem (embora a figura da página 162 mostre isso claramente); como conseqüência desse último fato, o módulo da diferença de dois complexos não é visto como a distância entre os pontos a eles correspondentes.

As seções 5.12 e 5.13, que tratam da forma trigonométrica dos complexos e das operações com os números nessa forma são bem feitas, exceto pela ausência da interpretação geométrica da multiplicação.

A habitual atitude do autor de seccionar excessivamente os tópicos faz com que neste capítulo a forma algébrica fique muito separada da representação geométrica dos complexos como pontos do plano. A representação geométrica é mencionada, porém não explorada, como já vimos. Perde-se mais uma vez a oportunidade de enfatizar os vínculos entre os assuntos estudados, a despeito de o capítulo sobre os números complexos aparecer imediatamente após 147 páginas devotadas ao tratamento da Geometria Analítica.

Capítulo 6. Polinômios

Capítulo 7. Equações algébricas

O Capítulo 6 se inicia sem qualquer motivação para o tema de que trata. Teria sido oportuna uma introdução chamando a atenção para o interesse de se estudar os polinômios em relação à resolução de equações algébricas, assunto do capítulo seguinte.

A forma que o autor escolhe para definir função polinomial (ou polinômio, já que para ele são sinônimos) pode levar o leitor a crer que só podem ser considerados polinômios complexos, pois o texto diz (página 184):

> "Denomina-se *polinômio* ou *função polinomial* toda função do tipo
>
> $$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{m-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$
>
> sendo
>
> $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ e a_0 os coeficientes do polinômio (em $\mathbb{C}$)
> n um número natural
> x a variável, com $x \in \mathbb{C}$."

O Capítulo 6 não foge à regra geral da coleção, o excesso de subdivisões. A seção 6.2, por exemplo, dedica-se exclusivamente a abordar o valor numérico de um polinômio quando se substitui a variável por um número qualquer, e para algo tão simples, o texto enumera 6 exemplos, 7 exercícios e 5 testes, o que é evidentemente exagerado.

A seção seguinte, por sua vez, serve também para assunto único: o polinômio identicamente nulo. À página 188, está escrito "Um polinômio $P(x)$ é *identicamente nulo* se, e somente se, todos os seus coeficientes são iguais a zero, e indicamos por: $P(x) = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0\ (\forall\, x \in \mathbb{C})$".

É correto dizer que a função identicamente nula é aquela que se anula para todos os valores da variável, e ela tem realmente todos os coeficientes nulos, mas isso é uma conseqüência da definição e do fato de que uma função polinomial complexa de grau n pode ter no máximo n zeros. Não é preciso aguardar um grande desenvolvimento do conteúdo para se mostrar esse fato, que decorre do seguinte resultado: se um número complexo a é zero de uma função polinomial P, então $P(x)$ é divisível por $x - a$. E isso pode ser provado com base na simples identidade $x^k - a^k = (x - a)(x^{k-1} + ax^{k-2} + \cdots + a^{k-2}x + a^{k-1})$, válida para k inteiro positivo.

A apresentação dos polinômios idênticos na seção 6.5 contém engano semelhante, pois o autor escreve que dois polinômios são idênticos "se, e somente se, os coeficientes dos termos de mesmo grau são iguais" (página 189). O correto é dizer que duas funções polinomiais p e q são idênticas se $p(x) = q(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Daí decorre que a diferença $p - q$ é identicamente nula, e, portanto, seus coeficientes são todos nulos, o que leva à igualdade dos coeficientes dos termos de mesmo grau de p e q.

O autor opta por não definir o grau do polinômio identicamente nulo; vale registrar que algumas vezes é conveniente considerar que esse grau é $-\infty$.

Na seção 6.6, a expressão "fração polinomial", utilizada para designar os quocientes de funções polinomiais (normalmente chamados funções racionais), é estranha; além disso, não conseguimos entender a razão da presença desse tópico no capítulo.

As propriedades da adição e da multiplicação de polinômios não são sequer mencionadas nas seções que lhes correspondem. O estudo da divisão é essencial pelo fato de a divisibilidade de polinômios representar uma ferramenta fundamental no estudo das raízes das equações algébricas. Também é muito pertinente assinalar a analogia entre esse conceito para polinômios e a divisibilidade entre os números inteiros. Contudo, na seção 6.9, que trata da divisão de polinômios, nada se diz a respeito, e a existência e a unicidade do quociente e do resto são admitidas sem qualquer discussão.

Na seção 6.10, o autor mostra que o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $x - a$ é $P(a)$. No exemplo 2 da página 199, é calculado o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $D(x) = 3x - 2$ como o valor de $P(2/3)$, o que é correto, porém feito sem maiores explicações, o que pode prejudicar o entendimento do leitor.

Após enunciar e provar (por meio do algoritmo da divisão de polinômios) o teorema do resto (o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $(x-a)$ é $P(a)$), à página 201, o texto diz que o teorema de D'Alembert (um polinômio $P(x)$ é divisível por $(x-a)$, se e somente se, $P(a)=0$) é uma conseqüência do teorema do resto. De fato, o resultado é imediato, porém em nenhuma parte do capítulo é dito o que significa um polinômio ser divisível por outro, de modo que a compreensão do teorema é comprometida.

A apresentação do dispositivo de Biot-Ruffini, na seção 6.12, é feita sem justificativa, como um passe de mágica, mediante três exemplos.

O Capítulo 7 começa muito adequadamente por uma introdução que aborda a história das equações algébricas, destacando o trabalho dos matemáticos italianos do século XVI, fazendo referência à obra de Abel e Galois e incluindo duas breves notas biográficas sobre esses dois grandes matemáticos do século XIX.

Na seção 7.3, é focalizado o teorema fundamental da Álgebra. Ao enunciado apresentado à página 214 falta dar maior destaque ao fato de se referir a equações algébricas com coeficientes complexos, ainda que seja esse o domínio em que se desenvolve o conteúdo deste capítulo e o do que o precede. Também seria altamente desejável dizer algo acerca do fato de a demonstração desse teorema não ser acessível ao estudante do Ensino Médio por se fundamentar em tópicos mais avançados.

O fato de um polinômio complexo de grau n ter no máximo n raízes pode ser visto também, como propõe o autor, como uma conseqüência do teorema fundamental da Álgebra, mas o texto poderia ser mais claro quanto a isso.

O enunciado do teorema da decomposição de um polinômio (página 215) não faz referência à unicidade dessa decomposição nem à possibilidade de as raízes se repetirem, e a multiplicidade de uma raiz só é abordada três páginas adiante, em outra seção, de forma obscura. Em conseqüência, a demonstração do teorema também não é apresentada claramente.

Na seção 7.4 (Raízes nulas de uma equação algébrica), o autor pretende que o leitor "note" três propriedades que não são, de modo algum, imediatamente visíveis a partir dos dois exemplos citados de equações algébricas que admitem zero como raiz (página 217).

Como a noção de multiplicidade de uma raiz de uma equação algébrica não é definida satisfatoriamente, alguns exemplos da seção 7.5 mostram deficiências no enunciado ou na resolução. No exemplo 2 da página 218, seria importante observar que $Q(3)\neq 0$, já que 3 é raiz de multiplicidade 2 de $(x-3)^2\,Q(x)$. O exemplo 3 pede que se escreva uma equação algébrica que tenha 2 como raiz simples, 3 como raiz de multiplicidade 2 e $a_n=1$ (coeficiente do termo de maior grau). O texto apresenta como única solução a equação $(x-2)(x-3)^2=0$, mas na verdade qualquer equação da forma $(x-2)(x-3)^2\,Q(x)=0$ é solução do problema proposto desde que Q seja um polinômio complexo com $Q(2)\neq 0$, $Q(3)\neq 0$ e coeficiente do termo de maior grau igual a 1. O exemplo 5 pede para mostrar que -2 é raiz de multiplicidade 2 da equação $x^4+2x^3-3x^2+4x+4=0$. À página 219 está escrito:

> "Resolução: Temos $P(x)=(x+2)^2\,Q(x)$ e $Q(-2)\neq 0$."

Na verdade isso não é o que temos, e sim o que precisamos provar. Depois da aplicação do dispositivo de Briot–Ruffini, que mostra claramente que o resto da divisão do polinômio $Q(x)=x^2-2x+1$ por -2 é 9, é totalmente dispensável calcular $Q(-2)$ como está feito no livro.

Assim como no Capítulo 5 as propriedades da conjugação de números complexos não foram mostradas, também o teorema a respeito das raízes complexas conjugadas de uma equação algébrica com coeficientes reais "cai do céu", junto com suas conseqüências, que não são acompanhadas de qualquer explicação.

Contrariamente a essa posição, o teorema que permite pesquisar as raízes racionais de uma equação algébrica com coeficientes inteiros é demonstrado correta e detalhamente.

As relações de Girard são provadas minuciosamente para equações algébricas de graus 2 e 3 e enunciadas para as de grau 4, nada se dizendo sobre as de grau mais elevado.

Os dois capítulos que acabamos de analisar mostram, como comentamos, uma grande quantidade de problemas quanto à conceituação. O tratamento que conferem aos polinômios enfatiza exclusivamente o seu aspecto algébrico, não aparece *nenhum* gráfico, ou seja, não há referência ao seu aspecto analítico. Como o texto nada diz sobre a analogia entre a divisibilidade entre os inteiros e a divisibilidade entre os polinômios, o aspecto aritmético passa despercebido. Embora a introdução do Capítulo 7 mencione as soluções de equações algébricas por fórmulas, nenhum exemplo é dado focalizando esse tipo de solução. E, finalmente, nenhuma palavra é pronunciada quanto aos métodos numéricos de resolução de equações algébricas, que são empregados com eficiência na abordagem desse problema na prática.

Capítulo 8. Noções de Estatística

O capítulo começa, de modo louvável, por um texto que chama a atenção para as inúmeras aplicações da Estatística, fazendo referência à sua importância na tomada de decisões.

Os assuntos enfocados são conceitos da Estatística Descritiva, tais como população, amostra, variáveis e dados estatísticos, distribuição de freqüência, medidas de tendência central e de dispersão. São também apresentadas diferentes representações gráficas de distribuições de freqüência como os histogramas, os gráficos de setores e de barras e os pictogramas. O texto é bem ilustrado com desenhos que exemplifica, todas essas representações, além de tabelas e fotografias.

Os conteúdos do capítulo são dos mais relevantes para a inserção do cidadão brasileiro na sociedade atual, o que pode ser facilmente comprovado pela constante presença dos resultados de pesquisas que utilizam os métodos estatísticos em todos os veículos de comunicação.

Embora o autor defina de maneira clara os diversos conceitos que focaliza, algumas vezes escolhe abordá-los descontextualizadamente, como no cálculo de algumas medidas de tendência central e de dispersão. Em relação às primeiras, não explica o interesse em se usar uma ou outra; no segundo caso, as fórmulas são simplesmente apresentadas sem motivação ou explicação.

Há um número grande de exercícios resolvidos e propostos com dados relativos a notas, idades e estaturas. Parece-nos que seria fácil apresentar outros referentes a assuntos mais variados.

Alguns dos temas em que a Estatística é utilizada com maior destaque e divulgação são, por exemplo, as pesquisas em relação à audiência da televisão, ao consumo de vários tipos de produtos e às campanhas eleitorais. Em todo o capítulo só encontramos um problema sobre uma pesquisa eleitoral, e nenhum referente à audiência ou ao consumo.

Nenhuma conexão é feita entre o conteúdo deste capítulo e o estudo das probabilidades empreendido no Volume 2 da coleção. Além disso, o aluno não é, em qualquer momento, solicitado a ele próprio proceder à coleta, à organização e ao tratamento de um conjunto de dados com os instrumentos que o texto descreve.

O autor omite-se completamente no sentido de procurar mostrar como a Estatística é usada para se tomarem decisões, o que constitui, afinal, seu maior interesse e a razão da abordagem de suas noções na escola básica.

Capítulo 9. Limites

Capítulo 10. Derivadas

O debate em torno do ensino do Cálculo na escola secundária é antigo no Brasil, e houve épocas em nossa História em que os conteúdos ligados a esse tema fizeram parte de programas escolares, oficiais ou não.

A importância e a variedade de aplicações do Cálculo é ressaltada pelo autor na introdução do Capítulo 9, que inclui ainda uma brevíssima explicação a respeito de sua evolução histórica, bem como notas biográficas sobre Newton e Leibniz.

É consenso que uma apresentação rigorosa dos conceitos fundamentais do Cálculo não pode ser empreendida no nível médio do ensino. Apesar disso, algumas de suas notáveis aplicações aí podem ser focalizadas, fazendo-se apelo a uma abordagem intuitiva, e usando de honestidade no sentido de enfatizar que isso é o que se pretende nessa etapa da educação.

Infelizmente, contudo, estes dois capítulos não são bem sucedidos quanto a tal tarefa, apresentando diversos problemas que procuraremos comentar.

O autor introduz intuitivamente, de maneira adequada, a noção de limite de uma função em um ponto examinando por meio de uma tabela o comportamento de uma função afim dada por sua expressão nas proximidades de um ponto, apresentando também o seu gráfico. Em seguida, define vizinhança de um ponto, usa a expressão "vizinhança simétrica de um ponto", que não conhecíamos, e define o limite usando ε e δ, mas esquecendo-se de relacioná-los com as vizinhanças das quais acabou de falar. Cabe registrar que há um erro na definição de limite à página 268: em lugar de $l - \varepsilon < L < L + \varepsilon$, dever ser $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.

Sem apresentar qualquer exemplo que ilustre a definição recém-dada, o texto "dá um pulo" para uma seção chamada "Limites laterais e limites infinitos". Aí os limites laterais não são definidos, mas apresentados mediante um exemplo dado por um gráfico, no qual os limites à direita e à esquerda são distintos. Depois de pedir ao leitor que observe isso, o autor escreve à página 268:

> "Então podemos enunciar: Só existirá o limite de uma função para x tendendo a um determinado valor, se os limites laterais dessa função forem iguais."

E nenhuma relação é feita com a definição de limite que foi dada na página anterior. No mesmo exemplo, solicita-se ao leitor que observe que $\lim_{x \to 6_-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to 6_+} f(x) = +\infty$.

Não é mostrada mais qualquer preocupação quanto ao esclarecimento sobre o que é um limite infinito. Logo depois, à página 270, pretende-se o estudo dos limites da função $f(x) = -x + 3$, quando a variável tende a $+\infty$ e a $-\infty$, embora nada se tenha dito a respeito da situação. Outros exercícios são propostos com o mesmo tipo de objetivo.

A noção de continuidade de uma função em um ponto é definida corretamente. No entanto, logo depois são apresentados 4 exemplos de funções que são contínuas em $\mathbb{R}$, mas nada se diz sobre o que estão ilustrando — continuidade em um ponto? Qual? Ou trata-se da continuidade num intervalo, no caso a reta? Entretanto, a continuidade num intervalo jamais é definida.

O exemplo 3 da página 276 usa propriedades operatórias dos limites, porém essas são enunciadas somente na página seguinte, sem qualquer justificativa ou explicação quanto à falta dessa justificativa. Na oportunidade, o autor aproveita para incluir entre as propriedades operatórias a continuidade do logaritmo e das funções polinomiais, mesmo não explicitando-a.

Na seção 9.8, ocorre uma referência a "uma indeterminação na forma 0/0", porém não se explica o que é isso. No exemplo 1 da mesma seção (página 280), há um grave engano: pretende-se calcular o limite do quociente dos polinômios $x^2 + 5x + 6$ e $x^2 - 3x - 10$, nesta ordem, quando x tende a -2. Na "resolução" está escrito:

> "Pela propriedade do quociente de duas funções, devemos ter:
>
> $$\lim_{x \to -2}(x^2 - 3x - 10) = 0 \text{ e } \lim_{x \to -2}(x^2 + 5x + 6) = 0.$$
>
> Estamos diante da indeterminação 0/0."

Ora, de fato, os limites acima estão corretos, mas não "pela propriedade do quociente de duas funções". No enunciado dessa propriedade, o próprio texto do livro destaca, à página 217, que o limite do denominador deve ser diferente de zero para que se possa aplicá-la.

Na seção 9.9, ao considerar a função polinomial $f(x) = a_n x^n + a - n - 1x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, na página 281, o autor faz a ressalva desnecessária $a_0 \neq 0$. Talvez ele quisesse dizer $a_n \neq 0$ para garantir que o polinômio tenha grau positivo.

O estudo dos limites de funções polinomiais quando a variável tende a $+\infty$ e a $-\infty$ é feito corretamente. Todavia, no exemplo 4 dessa seção, à página 283, há um equívoco quando se faz o cálculo de $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{3x^3 - 2x^2 - x + 1}$ e encontra-se $-\infty$ como resultado. O problema é que a função polinomial $p(x) = 3x^3 - 2x^2 - x + 1$ tende a $-\infty$ quando $x \to -\infty$. Isso torna sem sentido estudar o comportamento da função raiz quadrada desse polinômio em tal situação.

Ainda na mesma página, há uma inadequação de linguagem quando se fala em substituir x por $+\infty$; devemos lembrar que ∞ é um símbolo e não se pode dizer que vamos substituir a variável por ∞ como a substituímos por um número. Aí também está introduzida, sem qualquer explicação, mais uma indeterminação: é a vez de $+\infty/+\infty$.

O capítulo contém ainda uma seção intitulada "Limites fundamentais", na qual o limite $\lim\limits_{x \to 0}(\operatorname{sen} x)/x = 1$ é mostrado corretamente, apesar do uso do resultado $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ sem nenhuma observação preliminar. Os limites $\lim\limits_{x \to +\infty}(1 + 1/x)^x = e$ e $\lim\limits_{x \to 0}(a^x - 1)/x = \ell n\ a$ ($a > 0$ e $a \neq 1$) são lançados ao leitor sem nenhuma explicação.

O Capítulo 10 introduz a derivada como limite da razão incremental em um ponto de forma um tanto abrupta, sem qualquer motivação referente, por exemplo, ao estudo da reta tangente ao gráfico de uma função ou ao conceito de velocidade instantânea de uma partícula em movimento retilíneo. Somente depois de 12 páginas é que esses assuntos aparecem; com o subtítulo “A derivada e a cinemática”, na seção 10.9, há um texto pouco claro sobre a velocidade instantânea. Não é dada qualquer explicação a respeito da noção de reta tangente a uma curva qualquer.

O texto prova algumas das regras de derivação; outras simplesmente “caem do céu” sem que esse fato tenha necessariamente relação com a maior ou menor dificuldade da demonstração.

Em nenhum momento do capítulo faz-se referência ao importante fato de que se uma função é derivável num ponto, ela é contínua nesse ponto.

Na seção 10.10, fala-se em continuidade de uma função num intervalo, mesmo nada se tendo dito quanto a isso anteriormente. O autor define funções crescentes e decrescentes num intervalo com base no sinal de suas derivadas, sem relacionar essa situação com as funções crescentes e decrescentes apresentadas no Volume 1.

O tratamento dado aos máximos e mínimos locais é feito por desenhos e afirmação de condições sobre o sinal da derivada nas proximidades do ponto em foco, sem nenhuma menção explícita ao crescimento e decrescimento da função, de que se acabou de falar na página anterior. Com uma abordagem semelhante, o autor se refere a um “ponto de inflexão horizontal” sem qualquer palavra sobre a concavidade do gráfico de uma função. E depois disso tudo, as derivadas não são aplicadas em qualquer esboço de gráfico.

Nos poucos problemas sobre máximos e mínimos, são encontrados os pontos críticos e é analisado o sinal da derivada sem qualquer consideração quanto ao domínio da função que, em cada exemplo, é uma restrição do conjunto mais amplo onde está definida sua expressão algébrica.

A análise destes dois últimos capítulos do volume coloca em evidência uma realização um tanto descuidada, dando a impressão de uma “colcha de retalhos” na qual faltam muitas costuras e partes essenciais. Essa falta de zelo encerra sem brilho o terceiro volume, e a sensação que temos é a de que não valeu a pena focalizar os conteúdos do Cálculo na coleção.

Considerações finais sobre o volume

Como nos livros anteriores, o autor adota neste uma abordagem muito fragmentada dos tópicos referentes a cada conteúdo e apresenta uma quantidade exagerada de exercícios, vários deles puramente mecânicos e repetitivos.

As qualidades da disposição visual adequada dos textos e ilustrações, mantidas neste terceiro volume, lhe dão aparência atraente. Merecem elogios algumas das introduções dos capítulos que procuram mostrar, ainda que resumidamente, aspectos históricos dos conteúdos e aspectos relevantes de suas aplicações.

No entanto, desafortunamente, não podemos deixar de registrar neste comentário a presença de problemas graves em relação à conceituação, particularmente no que diz respeito à abordagem das funções polinomiais e dos temas do Cálculo.

Considerações finais sobre a coleção

Esta coleção tem boas qualidades quanto à programação visual, com disposição gráfica do texto adequada e ilustrações bem cuidadas.

As notas sobre a História da Matemática distribuídas ao longo dos três volumes e colocadas, em geral, nas introduções dos capítulos, representam um esforço do autor que deve ser reconhecido, mesmo que em muitos casos se apresentem um tanto desconectadas do que é exposto no desenvolvimento dos conteúdos.

Características gerais da coleção que procuramos assinalar na análise dos três volumes são:

- o excesso de subdivisões dos capítulos, que prejudica uma visão abrangente dos temas.
- a falta de preocupação no sentido de estabelecer relações entre os conteúdos tratados e outros a eles ligados, estejam estes contidos no mesmo volume, em volumes diferentes da coleção, ou em livros destinados ao Ensino Fundamental.
- as muitas deficiências quanto à conceituação, especialmente nos assuntos relativos aos números e funções (volume 1), à álgebra linear (volume 2), às funções polinomiais e ao cálculo diferencial (volume 3).
- a pouca ênfase concedida às aplicações.
- a preferência pelo uso de fórmulas na abordagem dos problemas e o gosto acentuado pelo excesso de símbolos.
- a ausência completa de explicação ou justificativa para um grande número de proposições em todos os volumes.
- a presença de muitas inadequações e incorreções no que se refere à linguagem matemática.
- o exagero na quantidade de exercícios, que em sua maior parte envolvem sobretudo manipulações destituídas de criatividade.